





$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

а типовой блок определяется по формуле [1]:

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} dV. \quad (4)$$

Для того чтобы построить матрицы для элемента, необходимо выразить перемещения точек внутри элемента через перемещения его узлов, т.е. установить зависимость  $\{u\} = [C]\{q\}_i = \left[ [C]^{(1)} [C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(n)} \right] \{q\}_i$ . Матрица интерполяционных функций для тетраэдра будет иметь четыре блока по числу узлов

$$[C] = \left[ [C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} [C]^{(4)} \right], \quad (5)$$

каждый из которых равен  $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$ , где  $E_3$  – единичная матрица третьего порядка.

Закон изменения перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$  по области элемента примем в виде линейных функций координат, т.е.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z; \\ v(x, y, z) &= \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z; \\ w(x, y, z) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что функции (6) обеспечивают неразрывность перемещений на границе между элементами. Для определения 12-ти неизвестных коэффициентов  $\alpha_i$  имеются 12 условий по общему числу компонент узловых перемещений (4 узла по 3 перемещения в каждом). Например,  $u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = \alpha_1 + \alpha_4 x_1 + \alpha_7 y_1 + \alpha_{10} z_1$  и т.д. Учитывая очевидные соотношения

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) + C_2(x, y, z) + C_3(x, y, z) + C_4(x, y, z) &= 1; \\ C_1(x, y, z)x_1 + C_2(x, y, z)x_2 + C_3(x, y, z)x_3 + C_4(x, y, z)x_4 &= x; \\ C_1(x, y, z)y_1 + C_2(x, y, z)y_2 + C_3(x, y, z)y_3 + C_4(x, y, z)y_4 &= y; \\ C_1(x, y, z)z_1 + C_2(x, y, z)z_2 + C_3(x, y, z)z_3 + C_4(x, y, z)z_4 &= z, \end{aligned} \quad (7)$$

после преобразований получим

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y, z) \\ C_2(x, y, z) \\ C_3(x, y, z) \\ C_4(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Откуда найдем



Матрицу, осуществляющую связь между напряжениями и деформациями при объемном напряженном состоянии запишем в общем виде для анизотропного материала  $[D] = [D_{ij}]$  (причем  $D_{ij} = D_{ji}$ ), где  $i, j=1, \dots, 6$ . При этом будем исходить из предположения, что эта матрица постоянна в пределах элемента.

Подставив (14) и матрицу  $[D]$  в выражение (4) и осуществив интегрирование, получим типовой блок матрицы жесткости элемента в виде тетраэдра. Т.к. все компоненты матрицы  $[B]^{(k)}$  являются независимыми от координат постоянными величинами, то интеграл в (4) заменяется выражением

$$[K]_{il}^{(k)} = \frac{1}{36V_i^2} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11} &= D_{11}b_k b_j + D_{44}c_k c_j + D_{66}d_k d_j + D_{14}(c_k b_j + b_k c_j) + D_{16}(d_k b_j + b_k d_j) + D_{46}(d_k c_j + c_k d_j); \\ K_{12} &= D_{12}c_k b_j + D_{14}b_k b_j + D_{15}d_k b_j + D_{24}c_k c_j + D_{44}b_k c_j + D_{45}d_k c_j + D_{26}c_k d_j + D_{46}b_k d_j + D_{56}d_k d_j; \\ K_{13} &= D_{13}d_k b_j + D_{15}c_k b_j + D_{16}b_k b_j + D_{43}d_k c_j + D_{45}c_k c_j + D_{46}b_k c_j + D_{36}d_k d_j + D_{56}c_k d_j + D_{66}b_k d_j; \\ K_{21} &= D_{12}b_k c_j + D_{24}c_k c_j + D_{26}d_k c_j + D_{14}b_k b_j + D_{44}c_k b_j + D_{46}d_k b_j + D_{15}b_k d_j + D_{45}c_k d_j + D_{56}d_k d_j; \\ K_{22} &= D_{22}c_k c_j + D_{44}b_k b_j + D_{55}d_k d_j + D_{24}(b_k c_j + c_k b_j) + D_{25}(d_k c_j + c_k d_j) + D_{45}(d_k b_j + b_k d_j); \\ K_{23} &= D_{23}d_k c_j + D_{25}c_k c_j + D_{26}b_k c_j + D_{34}d_k b_j + D_{45}c_k b_j + D_{46}b_k b_j + D_{35}d_k d_j + D_{55}c_k d_j + D_{56}b_k d_j; \\ K_{31} &= D_{13}b_k d_j + D_{34}c_k d_j + D_{36}d_k d_j + D_{15}b_k c_j + D_{45}c_k c_j + D_{56}d_k c_j + D_{16}b_k b_j + D_{46}c_k b_j + D_{66}d_k b_j; \\ K_{32} &= D_{23}c_k d_j + D_{34}b_k d_j + D_{35}d_k d_j + D_{25}c_k c_j + D_{45}b_k c_j + D_{55}d_k c_j + D_{26}c_k b_j + D_{46}b_k b_j + D_{56}d_k b_j; \\ K_{33} &= D_{33}d_k d_j + D_{55}c_k c_j + D_{66}b_k b_j + D_{35}(c_k d_j + d_k c_j) + D_{36}(b_k d_j + d_k b_j) + D_{56}(b_k c_j + c_k b_j), \\ j, k &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Распределенные объемные силы, вектор-столбец которых  $\{G_V\} = \{X_V Y_V Z_V\}$ , приводятся к эквивалентным узловым силам, вектор которых имеет блочную структуру  $\{P_V\}_i = \left\{ \{P_V\}_i^{(1)} \{P_V\}_i^{(2)} \{P_V\}_i^{(3)} \{P_V\}_i^{(4)} \right\}$ , причем каждый блок содержит компоненты вдоль осей  $x, y, z$  и равен  $\{P_V\}_i^{(k)} = \{P_{1V}^{(k)} P_{2V}^{(k)} P_{3V}^{(k)}\}$ . Получим [1]:

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \iiint_{V_i} C_k(x, y, z) \{G_V\} dx dy dz. \quad (16)$$

В том случае, когда объемные силы в пределах элемента постоянны

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \frac{V_i}{4} \{G_V\}, \quad (17)$$

т.е. узловые силы, статически эквивалентные объемным силам распределяются между узлами элемента пропорционально.

Отметим, что если  $i$ -й элемент подвергается начальной деформации  $\{\varepsilon_i\}$ , постоянной в пределах элемента, то вектор-столбец узловых сил, эквивалентный этому воздействию, имеет типовой блок:



Характеристики материала оболочки приведены в Таблице 1. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q$  варьировалась от 0 до 200 кПа. Расчет велся с помощью метода конечных элементов в сочетании с методом "переменных параметров" упругости [2, 12-13]. Проведено сравнение результатов полученных для нескольких различных теорий: А.А. Трещева [2], классической теории анизотропии, а также результатами, основанными на определяющих соотношениях С.А. Амбарцумяна [3] и Р.М. Джонса - Д.А.Р. Нельсона (в квазилинейной постановке) [4].

Результаты расчета представлены на рис. 3-6.

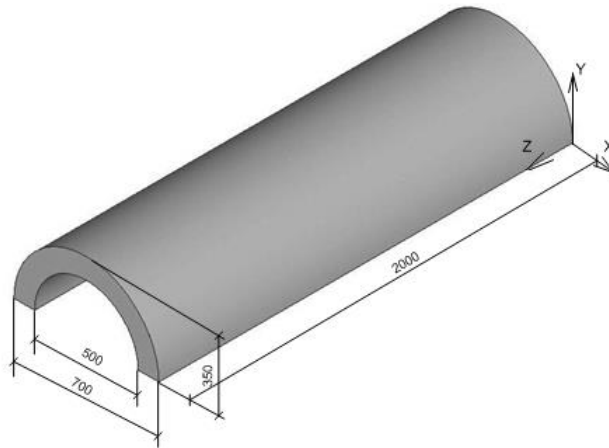


Рис. 2. Схема длинной цилиндрической оболочки.

Таблица 1. Механические характеристики.

Материал	Константы							
	$E_1^+$ , МПа	$E_1^-$ , МПа	$E_2^+$ , МПа	$E_2^-$ , МПа	$E_3^+$ , МПа	$E_3^-$ , МПа	$E_{12}^+$ , МПа	$E_{12}^-$ , МПа
Графит АТJ-S	16,56	12,42	16,56	12,42	10,35	8,28	11,04	9,315
	Константы							
	$E_{13}^+$ , МПа	$E_{13}^-$ , МПа	$\nu_{12}^+$	$\nu_{12}^-$	$\nu_{13}^+$	$\nu_{13}^-$	$\nu_{23}^+$	$\nu_{23}^-$
	11,04	9,315	0,14	0,095	0,14	0,095	0,14	0,095

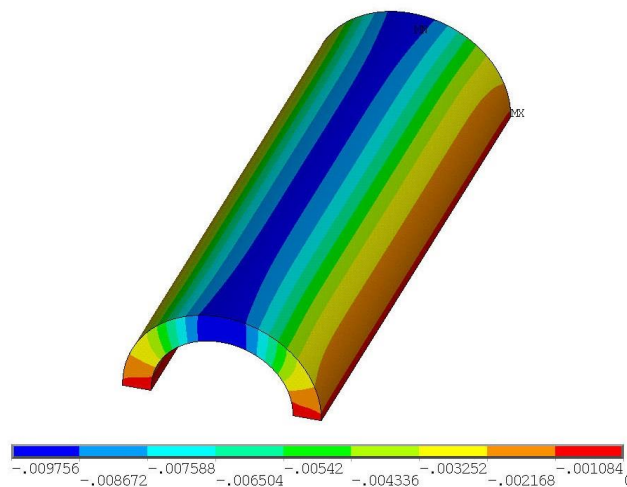
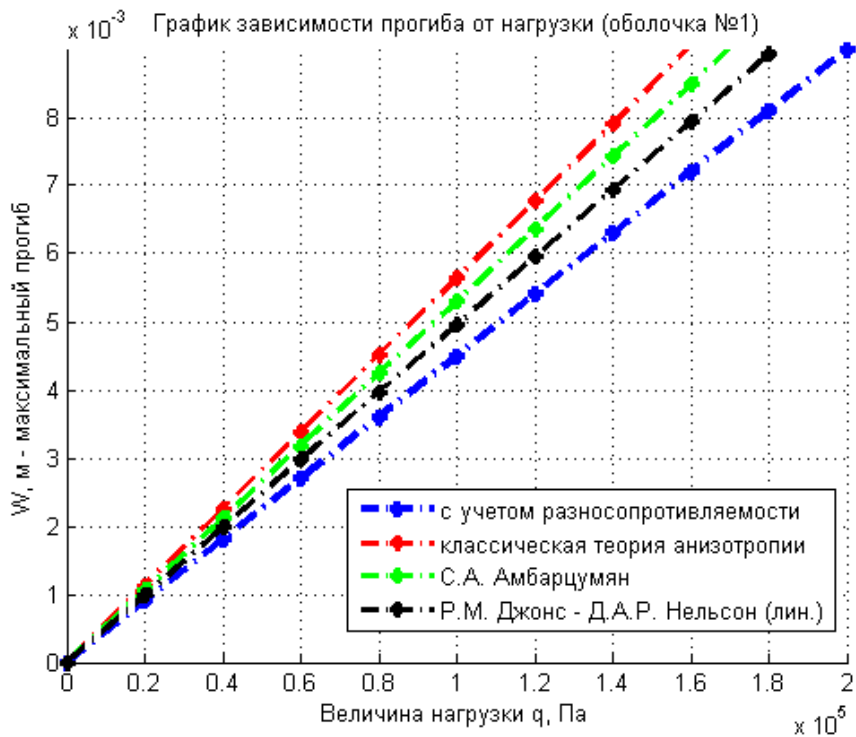


Рис. 3. Распределение вертикальных прогибов  $w$  в длинной оболочке.





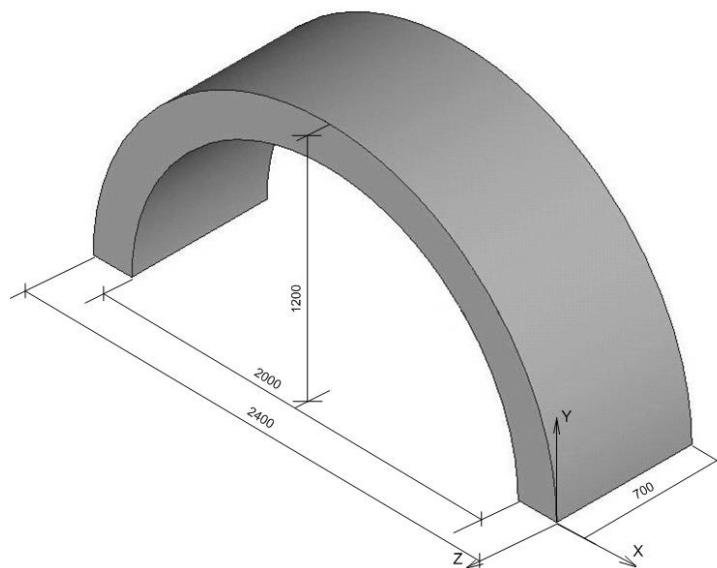


**Рис. 7.** График зависимости изменения максимального прогиба с ростом нагрузки в длинной оболочке.

#### 4. Расчет НДС короткой цилиндрической оболочки

Рассмотрим пример расчета толстой цилиндрической оболочки (рис. 7), жестко опертой по образующей и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Исходные данные для расчета принимались следующие: размеры в плане оболочки 700x2400 мм, высота подъема 1200 мм, внутренний радиус 1000 мм. Характеристики материала оболочки приведены в таблице 1. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q$  варьировалась от 0 до 330 кПа. Результаты расчета представлены на рис. 7-12.



**Рис. 7.** Схема короткой цилиндрической оболочки.



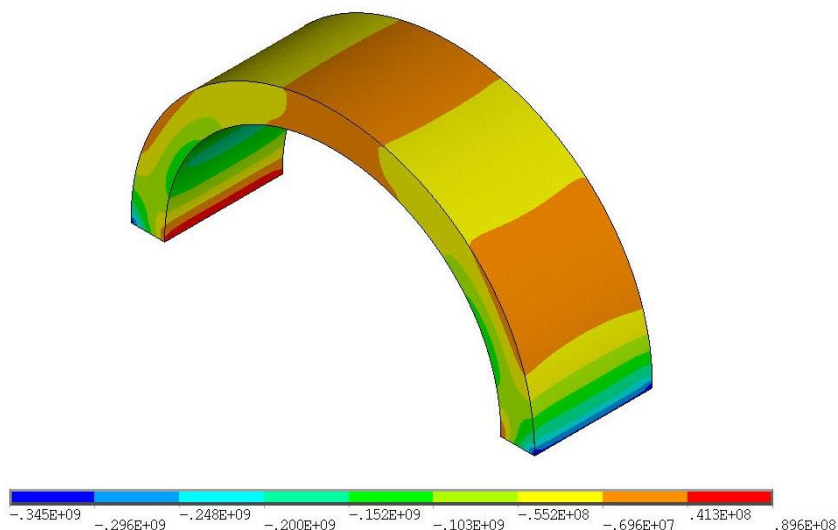


Рис. 11. Распределение напряжений  $\sigma_z$  в короткой оболочке.

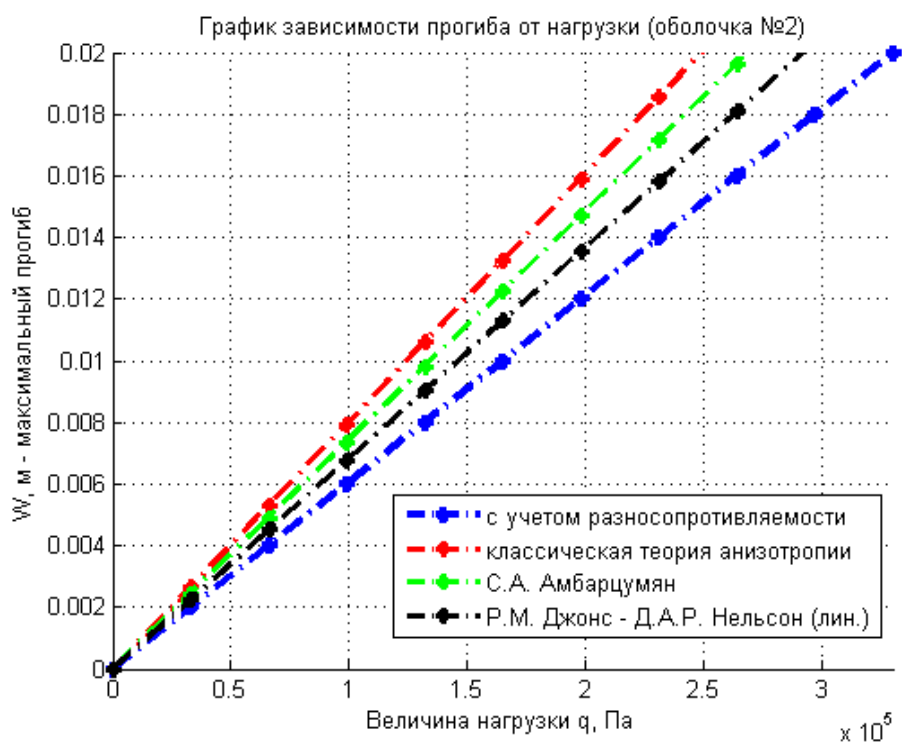


Рис. 12. График зависимости изменения максимального прогиба с ростом нагрузки в короткой оболочке.

## 5. Выводы

Проведенные авторами исследования напряженно-деформированного состояния толстых цилиндрических оболочек из разнотвердого анизотропного материала показали, что пренебрегать учетом явления разнотвердости при расчете толстых оболочечных элементов конструкций нельзя, так как это может привести к значительным погрешностям в определении параметров напряженно-деформированного состояния.

Разработанная авторами вычислительная модель приобретает особую актуальность в связи с широким распространением анизотропных

разносопротивляющихся материалов в строительных конструкциях, летательных аппаратах и технологическом оборудовании и в отсутствии надежной теории для расчета конструкций из таких материалов.

Материалы статьи могут быть полезны для специалистов в области прогнозирования поведения конструкций, а также для выполнения проектировочных и проверочных расчетов.

### Литература

- [1] С.Ф. Клованич, *Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики* (Світ геотехніки, Запорожье, 2009).
- [2] А.А. Трещёв, *Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения* (ТулГУ, Тула, 2008).
- [3] С.А. Амбарцумян, *Разномодульная теория упругости* (Наука, Москва, 1982).
- [4] R.M. Jones, *Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression* (AIAA Journal, 1977).
- [5] А.А. Трещев, В.Г. Теличко, In: *Сборник материалов II Международной научно-технической конференции: «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии»* **2** (2001) 103.
- [6] А.А. Трещев, В.Г. Теличко, Н.В. Васильев // *Известия ТулГУ. Технические науки* **2** (2011) 541.
- [7] А.А. Трещев, В.Г. Теличко, Д.А. Ромашин // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева* **2** (2012) 129.
- [8] В.Г. Теличко, А.В. Башкатов, In: *8-ая Международная конференция по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики: «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики»* **8** (2012) 25.
- [9] А.А. Трещев, В.Г. Теличко, Д.А. Ромашин // *Строительная механика и расчет сооружений* **6** (2012) 26.
- [10] А.А. Трещев, В.Г. Теличко, Д.А. Ромашин // *Вестник Центрального Регионального отделения РААСН* **11** (2012) 147.
- [11] А.А. Трещев, В.Г. Теличко, А.Н. Царев, П.Ю. Ходорович // *Известия ТулГУ. Технические науки* **10** (2012) 106.
- [12] В.Г. Теличко, П.Ю. Ходорович, In: *VII региональная молодёжная научно-практическая конференция Тульского государственного университета «Молодёжные инновации»* **7** (2013) 87.
- [13] В.Г. Теличко, А.Н. Царев, П.Ю. Ходорович, In: *Сборник материалов XIV Международной научно-технической конференции: «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии»* **14** (2013) 160.

# MODELING STRESS-STRAIN STATE THICK CYLINDRICAL SHELLS MADE OF MATERIALS WITH COMPLICATED PROPERTIES

A.A. Treschov, V.G. Telichko, P.Y. Khodorovich\*

Tula State University, Lenin Prospect 92,

Tula, 300012, Russian Federation

\*e-mail: antaresn80@mail.ru

**Abstract.** A modification of three-dimensional finite element in the form of a tetrahedron for calculating three-dimensional structures is considered. We derive a stiffness matrix for a finite element in the form of a tetrahedron with three degrees of freedom at the node. A model of the problem of determining stress-strain state thick cylindrical shells is developed.

## References

- [1] S.F. Klovanih, *The finite element in non-linear problems of mechanical engineering* (Svit geotekhniki, Zaporozhye, 2009).
- [2] A.A. Treschov, *The Theory of Deformation and durabilities for the Materials, sensitive to a kind of an stress condition. Determining Correlations* (TSU, Tula, 2008).
- [3] S.A. Ambartsumian, *Multimodulus elasticity theory* (Nauka, Moscow, 1982).
- [4] R.M. Jones, *Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression* (AIAA Journal, 1977).
- [5] A.A. Treschov, V.G. Telichko, In: *Collected materials of the II International Scientific and Technical Conference «Actual problems of building and construction industry»* **2** (2001) 103.
- [6] A.A. Treschov, V.G. Telichko, N.V. Vasiliev, In: *Proceedings of the TSU. Engineering* **2** (2011) 541.
- [7] A.A. Treschov, V.G. Telichko, D.A. Romashin // *Chuvash State Pedagogical University named after I.Y. Yakovlev* **2** (2012) 129.
- [8] V.G. Telichko, A.V. Bashkatov, In: *8th International Conference on the mining, construction and energy: «Socio-economic and environmental problems of mining, construction and energy»* **8** (2012) 25.
- [9] A.A. Treschov, V.G. Telichko, D.A. Romashin // *Structural mechanics and computation of structures* **6** (2012) 26.
- [10] A.A. Treschov, V.G. Telichko, D.A. Romashin // *The bulletin of Central regional Department of RAABS* **11** (2012) 147.
- [11] A.A. Treschov, V.G. Telichko, A.N. Tsarev, P.Y. Khodorovich, In: *Proceedings of the TSU. Engineering* **10** (2012) 106.
- [12] V.G. Telichko, P.Y. Khodorovich, In: *VII Regional Youth Scientific and Practical Conference of Tula State University, «Youth Innovation»* **7** (2013) 87.
- [13] V.G. Telichko, A.N. Tsarev, P.Y. Khodorovich, In: *Collected materials of the XIV International Scientific and Technical Conference «Actual problems of building and construction industry»* **14** (2013) 160.