

## ТЕОРИЯ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В УСЛОВИЯХ АУСТЕНИТНО-МАРТЕНСИТНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Э.Л. Аэро\*, А.Л. Корженевский, А.Н. Булыгин

Институт проблем машиноведения Российской академии наук,

Большой пр. 61, В.О., Санкт-Петербург, 199178, Россия

\*e-mail: 16aero@mail.ru

**Аннотация.** Развита аналитическая теория плоской деформации трехмерного бесконечно протяженного вдоль оси  $OZ$  образца с учётом аустенитно-мартенситных превращений. Учитываются как упругие деформации, так и обусловленные аустенитно-мартенситными превращениями, в том числе порождающие специфические микродеформации, нарушающие сплошность и бездефектность кристалла. Используется разработанная ранее модель сложной кристаллической решетки, состоящей из двух взаимно проникающих подрешеток, так что двойной континуум позволяет описать возможность нарушения не только дальнего, но и ближнего порядка. Для этого рассматривается закон баланса полярного (не аксиального) момента количества движения, учитывающего смещения между соседними атомами. При этом возможна кардинальная перестройка решётки, в частности, изменение числа ближайших соседей, что не рассматривается в классической теории фазовых переходов Ландау. Аналитическая форма теории впервые открывает возможности для дальнейшего развития и инженерных методов изучения материалов, испытывающих аустенитно-мартенситные превращения.

### 1. Введение

Одним из постулатов континуальной механики является условие неизменности в процессе деформирования локальной топологии - ближайшая окрестность материальной частицы всегда состоит из одних и тех же частиц. Иными словами, структура и силовые связи не перестраиваются. Отказ от этого ограничения требует соединения в модели среды континуальных и дискретных аспектов. Ограничимся здесь предельно простой полумикроскопической моделью. Положим, что дискретные степени свободы могут быть введены в континуум посредством дополнительного слагаемого в упругом потенциале в виде периодической функции межатомных микросмещений  $u$ , отличных от макросмещений  $U$ , связывающих исходное и конечное состояние материальной точки. Внутрячеечные смещения или микросмещения обычно вводятся в теории оптических колебаний решеток ионных кристаллов, однако, лишь в инфинитезимальном приближении [1, 2]. При этом макрополе  $U$  отвечает акустической ветви колебаний. Истинно оптические колебания возбуждаются за счет электрического поля, которое расщепляет совместное движение подрешеток. В случае же неполярной решетки это становится возможным в результате потери устойчивости дискретной структуры при больших сдвигах при достижении точки бифуркации. В этом случае корректно говорить о псевдооптических модах или микродеформациях.

Кристаллы, испытывающие мартенситные превращения (МП) как раз и характеризуются большими сдвиговыми деформациями начальной аустенитной

матрицы. Кроме того, эти превращения не описываются теорией фазовых переходов Ландау, поскольку для них не выполняется соотношение группа-подгруппа между группами симметрии аустенитной и мартенситной фаз. В то же время, как это было отмечено в наших предыдущих работах [3, 4], наличие критических значений смещений подрешеток вдоль определенных направлений приводит к возникновению новых элементов симметрии. Поскольку это происходит при любом значении смещения  $u$ , кратном критическому, то полная симметрия кристаллической решетки периодически восстанавливается. Ясно, что и энергия системы должна быть периодической функцией критических смещений. Отсюда следует, что радикальное отличие теории МП от фазовых переходов типа Ландау состоит в том, что в последней энергия системы (термодинамический потенциал) имеет только два минимума, а для описания МП необходимо рассматривать периодические потенциалы, имеющие бесконечное число минимумов.

Поскольку критические смещения имеют значения, составляющие значительные доли межатомных расстояний, то «жесткое» смещение подрешеток для реализации МП потребовало бы огромных сдвиговых напряжений атомного порядка. Физическая ситуация похожа на ту, которая была при анализе проблемы теоретической прочности кристаллов, когда для порядкового совпадения вычисленного значения предела упругости с наблюдаемым потребовалось рассмотрение промежуточных неоднородных состояний деформации кристалла. Как известно, дислокационные решения, которые описывают такие деформации, были получены в рамках модели Френкеля-Конторовой, также имеющей периодический потенциал. В силу указанной аналогии наша модель МП имеет похожую математическую структуру выражения для плотности потенциала, дополненную, однако, членом, который учитывает взаимодействие поля деформаций с градиентом поля микросмещений, а также вкладом упругих деформаций. Надо оговориться, что простая билинейная форма этого члена в эффективном потенциале появляется в результате редукции инварианта более высокого порядка по полю критических смещений [5], которая возможна из-за независимости значения критического смещения от внешних условий в так называемой предельной фазе [6]. Хотя эта редукция упрощает математическую структуру системы уравнений равновесия, получающиеся уравнения для макро- и микродеформаций остаются связанными. Основной целью настоящей работы является выработка процедуры расщепления этих уравнений, которая позволяет свести общую задачу определения поля макродеформации трехмерного тела к решению бигармонического уравнения. Для оставшегося же поля двухкомпонентных микросмещений удастся найти точные решения в тонких пластинах различной формы.

## 2. Основные соотношения. Учет взаимодействия мод микро- и макродеформаций

Рассматривается модель с двумя подрешетками, которые совмещаются (сливаются в одну или переходят из начального варианта в симметрично эквивалентный, например, сводящийся к общему повороту решетки) сдвигом на постоянный структурный вектор  $\vec{a}$ , являющийся параметром сложной решетки. Тогда в линейной классической теории кристаллической решетки [1,2] получаются два уравнения - для акустических и оптических мод соответственно, для полей макроскопических и микроскопических смещений  $U_i(x, y, t)$ ,  $u_i(x, y, t)$ . Первое описывает смещения центров кристаллических ячеек - элементов массы, как и в классической теории сплошной среды. Второе описывает взаимные смещения атомов внутри ячейки - отвечает за изменение ближнего порядка в сложной решетке.

Мы получим нелинейные уравнения равновесия, варьируя функционал энергии для заданной области  $(V, N)$ , который определен следующим образом

$$E = (1/8 p B H) \int_0^B \int_0^H e dx dy, \quad (2.1)$$

$$e = (1/2) \lambda_{ikjm} U_{i,k} U_{j,m} + (1/2) k_{ikmn} u_{i,k} u_{m,n} + C_{ikjm} U_{i,k} u_{j,m} + p(1 - \cos u) = \\ = (1/2) \lambda_{ikjm}^{-1} \sigma_{ik} \sigma_{jm} + (1/2) \hat{k}_{ikmn} u_{i,k} u_{m,n} + p(1 - \cos u). \quad (2.2)$$

Здесь  $u = \sqrt{(u_n a_{nm} u_m)}$ , где  $a_{nm}$  - тензор обратных длин ячейки. Далее  $U_{i,k}$ ,  $u_{i,k}$  - пространственные производные, обозначенные запятой в тензорных индексах. Круглые скобки в тензорах материальных констант означают симметрию по заключенным в них индексам, то есть

$$\lambda_{(ik)(jm)} = \lambda_{(ki)(mj)}, \quad C_{(ik)(jm)} = C_{(ki)(mj)}, \quad k_{(ik)(jm)} = k_{(ki)(mj)}, \quad \hat{k}_{(ik)(jm)} = \hat{k}_{(ki)(mj)}.$$

Избегая загромождения формул, будем далее подразумевать эти обозначения с применением скобок в индексах.

Первое слагаемое в (2.2) представляет собой упругую энергию деформирования, а последнее, содержащее периодическую функцию, энергию микросмещений со сравнительно небольшими периодами (подробнее см. [3, 4]). Это слагаемое представляет энергию взаимодействия подрешеток, инвариантную к их жесткому смещению на соответствующий период. Перекрёстное слагаемое с коэффициентом  $C_{ikjm}$  отвечает за принципиально важное взаимодействие поля деформаций с микроскопическим полем внутренней степени свободы (отвечающей внутриячейной перестройке атомной конфигурации). Выбор его формы в (2.2) определяется тем, что мы ищем, вообще говоря, решения уравнений

$$\rho \ddot{U}_x = \sigma_{xk,k}, \quad \rho \ddot{U}_y = \sigma_{yk,k}, \quad \sigma_{zk} = \sigma(xy), \quad (2.3)$$

$$\mu \ddot{u}_x + P_1 \sin u_x = \bar{k}_1 u_{x,xx} + \bar{k}_3 u_{x,yy} + \bar{k}_{23} u_{y,xy} + (S_1 \sigma_{xx} + S_2 \sigma_{yy})_{,x}, \quad (2.4)$$

$$\mu \ddot{u}_y + P_2 \sin u_y = \hat{k}_1 u_{y,yy} + \bar{k}_3 u_{y,xx} + \hat{k}_{23} u_{x,xy} + (S_2 \sigma_{xx} + S_4 \sigma_{yy})_{,y}. \quad (2.5)$$

Здесь  $U_i, u_i$  - компоненты макро- и микросмещений,  $U_i \rightarrow U_x, U_y, AZ$ ;  $u_i \rightarrow u_x, u_y, aZ$ . Подчеркнём, что мы рассматриваем линейную зависимость поперечных составляющих макросмещений  $U_x, U_y$  от поперечных же компонент микросмещений  $u_x, u_y$ .

### 3. Статические уравнения на двухкомпонентные поля микро- и макросмещений в анизотропных пластинах

Рассмотрим наиболее простые кристаллы кубической, гексагональной и ромбической сингоний. Для них «акустические» уравнения (2.3) имеют вид

$$0 = \lambda_1 U_{x,xx} + \lambda_{12} U_{y,xy} + \lambda_2 U_{x,yy} + c_1 u_{x,xx} + c_{12} u_{y,xy} + c_2 u_{x,yy}, \quad (3.1)$$

$$0 = \lambda_1 U_{y,yy} + \lambda_{12} U_{x,xy} + \lambda_2 U_{y,xx} + c_1 u_{y,yy} + c_{12} u_{x,xy} + c_2 u_{y,xx}. \quad (3.2)$$

Напряжения представимы формулами

$$\sigma_{xx} = \lambda_1 U_{x,x} + (\lambda_{12} - \lambda_2) U_{y,y} + c_1 u_{x,x} + (c_{12} - c_2) u_{y,y}, \quad (3.3)$$

$$\sigma_{yy} = (\lambda_{12} - \lambda_2) U_{x,x} + \lambda_1 U_{y,y} + (c_{12} - c_2) u_{x,x} + c_1 u_{y,y}, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{xy} = \lambda_2 (U_{x,y} + U_{y,x}) + c_2 (u_{x,y} + u_{y,x}). \quad (3.5)$$

Уравнения будем анализировать в форме Эри

$$\chi_{,xx} = \sigma_{yy}, \quad \chi_{,yy} = \sigma_{xx}, \quad \chi_{,xy} = -\sigma_{xy}. \quad (3.6)$$

Уравнение равновесия (2.3) в результате представлений (3.6) удовлетворяются тождественно. Заметим, что для кубического кристалла

$e = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + \lambda_{xxyy} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2 \lambda_{xyxy} \varepsilon_{yx}^2$ . При этом  $\lambda_1 = \lambda_{xxxx}$ ,  $\lambda_2 = 2 \lambda_{xxyy}$ ,  $\lambda_{12} = \lambda_{xxyy} + 2 \lambda_{xyxy}$ .

Для функции Эри имеем соотношения для напряжений

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \lambda_1 U_{x,x} + \lambda_2 U_{y,y} + c_1 u_{x,x} + c_2 u_{y,y}, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \lambda_1 U_{y,y} + \lambda_2 U_{x,x} + c_2 u_{x,x} + c_1 u_{y,y}, \quad (3.8)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = \lambda_3 (U_{y,x} + U_{x,y}) + c_3 (u_{y,x} + u_{x,y}). \quad (3.9)$$

Суммируя (3.7) и (3.8) пишем

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \nabla^2 \chi = (\lambda_1 + \lambda_2) \operatorname{div} U + (c_1 + c_2) \operatorname{div} u. \quad (3.10)$$

В результате уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, то есть

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{yy,y} + \sigma_{xy,x} = 0. \quad (3.11)$$

В настоящей модели согласно (3.7)-(3.9) получаем следующие соотношения

$$0 = \lambda_1 U_{x,xx} + (\lambda_2 + \lambda_3) U_{y,yx} + c_1 u_{x,xx} + (c_2 + c_3) u_{y,yx}, \quad (3.12)$$

$$0 = \lambda_1 U_{y,yy} + (\lambda_3 + \lambda_2) U_{y,xx} + c_1 u_{y,yy} + (c_3 + c_2) u_{y,xx}. \quad (3.13)$$

Они представляют собой основные уравнения равновесия упругого тела с учётом МП.

#### 4. Микромоментные эффекты

Обратимся к законам сохранения неаксиальных моментов количества движения (2.4), (2.5). Перепишем их в другом виде

$$p_1 \sin u_x = \bar{k}_1 u_{x,xx} + \bar{k}_3 u_{x,yy} + (\bar{k}_{23} u_{y,y} + S_1 \sigma_{xx} + S_2 \sigma_{yy})_{,x}, \quad (4.1)$$

$$p_2 \sin u_y = \hat{k}_1 u_{y,yy} + \bar{k}_3 u_{y,xx} + (\hat{k}_{23} u_{x,x} + S_2 \sigma_{xx} + S_4 \sigma_{yy})_{,y}. \quad (4.2)$$

Заметим, что несмотря на сделанные значительные упрощения, приведенные решение уравнений (4.1), (4.2) всё же в общем виде представляет весьма сложную проблему, поскольку микродеформации не разделены относительно полей  $u_x$ ,  $u_y$  из за членов с перекрестными производными. В общем виде это сделать невозможно. Ограничимся здесь случаем, когда неоднородные слагаемые (в круглых скобках, в том числе и производные напряжений) в уравнениях (4.1), (4.2) учитываются в независимой граничной задаче. Заметим, что они обращаются в нуль не только в случае постоянных напряжений, но и в более общем случае, когда

$$S_1 \sigma_{xx} + S_2 \sigma_{yy} = -\bar{k}_{23} u_{y,y} + f_1(y), \quad S_2 \sigma_{xx} + S_4 \sigma_{yy} = -\hat{k}_{23} u_{x,x} + f_2(x). \quad (4.3)$$

Здесь  $f$  обозначает произвольную функцию. Эти допущения упрощают общую задачу и оказываются достаточными для ее аналитического решения. Тогда полная система уравнений (4.1) - (4.3) принимает вид:

$$P_1 \sin u_x = \bar{k}_1 u_{x,xx} + \bar{k}_3 u_{x,yy}, \quad P_2 \sin u_y = \hat{k}_1 u_{y,yy} + \hat{k}_3 u_{y,xx}, \quad (4.4)$$

$$-\bar{k}_{23} u_{y,y} = S_1 \sigma_{xx} + S_2 \sigma_{yy} - f_1(y); \quad -\hat{k}_{23} u_{x,x} = S_2 \sigma_{xx} + S_4 \sigma_{yy} - f_2(x). \quad (4.5)$$

Здесь выражения, содержащие напряжения, можно выразить через смещения  $U_x$ ,  $U_y$  и

микросмещения  $u_x$ ,  $u_y$  в соответствии с формулами (3.3) и (3.5). Тогда в последних формулах следует принять

$$S_1\sigma_{xx}+S_2\sigma_{yy}=s_1U_{x,x}+s_2U_{y,y}+\alpha_1u_{x,x}+\alpha_2u_{y,y}, \quad S_2\sigma_{xx}+S_4\sigma_{yy}=s_3U_{x,x}+s_4U_{y,y}+\alpha_3u_{x,x}+\alpha_4u_{y,y}. \quad (4.6)$$

Производя с их помощью замену в (4.5), перепишем их вначале так

$$-(\bar{k}_{23}+\alpha_3)u_{x,x}=s_3U_{x,x}+s_4U_{y,y}+\alpha_4u_{y,y}-f_2(x), \quad -(\bar{k}_{23}+\alpha_2)u_{y,y}=s_1U_{x,x}+s_2U_{y,y}+\alpha_1u_{x,x}-f_1(y). \quad (4.7)$$

Разрешим эти выражения относительно  $u_{x,x}$ ,  $u_{y,y}$ . Получим  $s_9=s_{10}=s$

$$u_{x,x}=s_5U_{x,x}+s_6U_{y,y}-f_3(x); \quad u_{y,y}=s_7U_{x,x}+s_8U_{y,y}-f_4(y). \quad (4.8)$$

Громоздкие, но элементарные выражения для материальных коэффициентов в этих формулах не раскрываем. Используя эти формулы, запишем объединенное выражение, удобное в дальнейшем

$$u_{x,x}+u_{y,y}=s_9U_{x,x}+s_{10}U_{y,y}+f_3(x)+f_4(y). \quad (4.9)$$

Также может быть рассмотрен и случай

$$s_9=s_{10}=s \rightarrow u_{x,x}+u_{y,y}=s(U_{x,x}+U_{y,y})+f_3(x)+f_4(y). \quad (4.10)$$

В этом случае весь процесс распространения деформаций и микродеформаций описывается двумя волнами возмущений – макроскопической С1 и микроскопической с2. Каждая из них распространяется со своей скоростью, зависящей от структуры и материальных свойств материала.

## 5. Анализ пары уравнений синус-Гордона

Для полного решения всей проблемы необходимо построить решение и пары укороченных уравнений синус-Гордона (4.4), что оказывается возможным. Анализ подобных уравнений имеется в нашей работе [3]. На следующих рисунках представлено распределение частиц, в соответствии с решением уравнения типа (4.7) при различных значениях его параметров  $\bar{k}_3$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ . На рисунке 1 показано исходное (недеформированное) распределение частиц в образце, отвечающее однородной аустенитной фазе при  $\bar{k}_3$ ,  $K_1$ ,  $K_2=0$ .

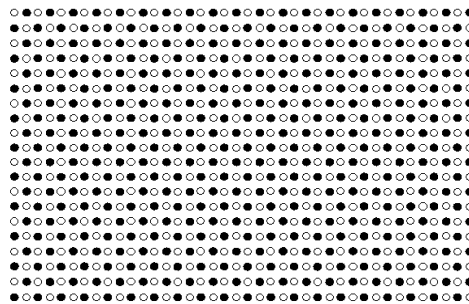


Рис. 1. Недеформированное распределение частиц.

Далее, будут показаны картины распределения и перераспределения атомов в плоскости подложки (XY) и вдоль оси OZ, возникающие при различных граничных условиях.

Опишем наблюдаемую картину в целом. Далее на каждой паре рисунков представлено распределение атомов в каждый момент времени. Затем показана аксонометрическая картина распределения частиц в трёхмерном пространстве. Дана их

проекция на плоскость ХУ, на которую все частицы спроектированы в каждый момент времени. Это сделано, поскольку мы рассматриваем случай плоского деформированного состояния, когда z-компонента микросмещения является произвольной константой задачи при отличных от нуля градиентах функций микросмещений  $u_x(x,y,t)$ ,  $u_y(x,y,t)$ . В случае статики (для неизменных во времени состояний деформирования) получаются разные распределения микросмещений, примеры которых даны формулами, выписанными ниже, а графики представлены на рисунках (3) - (6).

Ниже представлены графические изображения четырёх пар решений, выбранные в различные моменты времени, при одинаковых значениях в каждой паре параметров типа пространственной частоты. Они характеризуют микросмещения микрочастиц, хотя и совпадающие по величине, но относящиеся к разным точкам трехмерного изображения  $u_x(x_1, y_1, z_1)$ ,  $u_y(x_2, y_2, z_2)$ .

Рассмотрим примеры распределений микросмещений ОХУ в плоскости ( $Z = \text{const}$ ) поперечного сечения бруса.

Первый пример показан на Рис. 2. На плоскости ОХУ показана двумерная картина распределения координат частиц (атомов), которая может наблюдаться в эксперименте

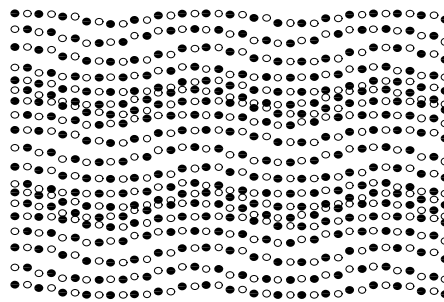


Рис. 2. Деформированное распределение частиц.

Она иллюстрирует парное решение уравнения вида (4.4), (4.5)

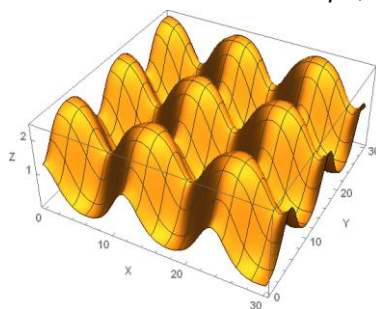
$$\operatorname{tg} \frac{u_x}{4} = a_x \operatorname{dn}(c_1 x, \sqrt{v_1}) / \operatorname{dn}(c_2 y, \sqrt{v_2}), \quad \operatorname{tg} \frac{u_y}{4} = a_y \operatorname{dn}(c_1 x, \sqrt{v_1}) / \operatorname{dn}(c_2 y, \sqrt{v_2}), \quad v_1=0.99, \quad v_2=0.99.$$

Здесь  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  - микросмещения атомов вдоль координатных осей ОХ, ОУ в произвольной точке. Здесь и далее  $\operatorname{dn}(x, v)$  - дельта-функция Якоби, а  $\operatorname{sn}(x, v)$ ,  $\operatorname{cn}(x, v)$  - эллиптические синус и косинус Якоби, соответственно. В случае равных амплитуд

$$\operatorname{tg} \frac{u_x}{4} = \operatorname{tg} \frac{u_y}{4} = a \operatorname{dn}(c_1 x, \sqrt{v_1}) / \operatorname{dn}(c_2 y, \sqrt{v_2}).$$

Пространственное распределение микросмещений для обоих уравнений имеет вид, показанный на Рис. 3.

Рассмотрим этот пример подробнее. Следует иметь ввиду, что это всего лишь одно (неплоское!!) поперечное сечение тела, которое возникает, если убрать продольные микросмещения деформации, порождаемые сжимающими деформациями (однородными вдоль оси ОZ). Реально имеем бесконечно длинное (вдоль оси ОZ) трехмерное однородное тело. Наглядный пример – толстая пачка бумаги, испытывавшая коробление после набухания во влажной атмосфере. Если её спрессовать и сделать плоской, то слои примут плоскую форму, но между ними возникнут напряжения сжатия и поперечные сечения станут плоскими. Текстура поверхности характеризуется соответствующей энергетической величиной.

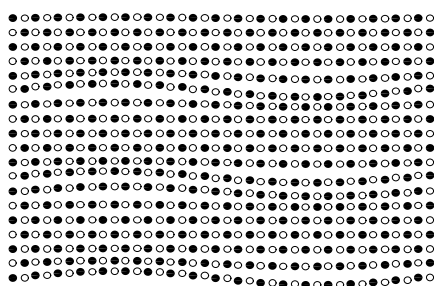


**Рис. 3.** Пространственное распределение микросмещений.

На Рис. 4 приведен другой пример распределения деформаций в этой же плоскости OZ (поперечного сечения бруса). Так, отправляясь от решения системы уравнений (4.4), (4.5) иного типа, например,

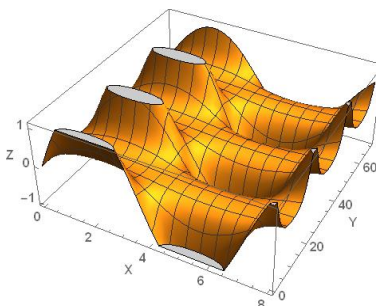
$$\operatorname{tg} \frac{u_x}{4} = a_x \operatorname{sn}(c_1 x, \sqrt{v_1}) \operatorname{dn}(c_2 y, \sqrt{v_2}), \quad \operatorname{tg} \frac{u_y}{4} = a_y \operatorname{sn}(c_1 x, \sqrt{v_1}) \operatorname{dn}(c_2 y, \sqrt{v_2}), \quad v_1=0.99, \quad v_2=0.99,$$

получим на плоскости OXY иную двумерную картину ориентаций молекул (Рис. 4).



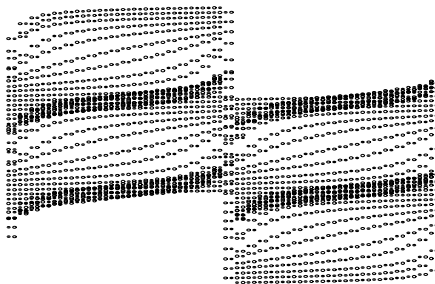
**Рис. 4.** Деформированное распределение частиц другого типа.

После снятия действия жесткой границы поверхность принимает форму, показанную на Рис. 5.



**Рис. 5.** Форма поверхности.

Искажение формы может иметь разрывные области с нарушением сплошности поверхности (Рис. 6).

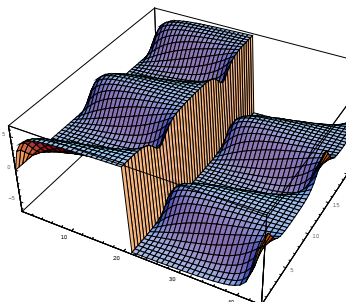


**Рис. 6.** Распределение частиц при наличии разрыва.

Так, отправляясь от иной пары решений уравнений (4.4), (4.5) получим поверхностное распределение частиц, например,

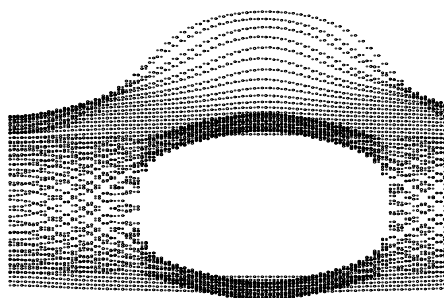
$$\operatorname{tg} \frac{u_x}{4} = a_x \operatorname{sn}(c_1 x, \sqrt{v_1}) \operatorname{dn}(c_2 y, \sqrt{v_2}), \quad \operatorname{tg} \frac{u_y}{4} = a_y \operatorname{sn}(c_1 x, \sqrt{v_1}) \operatorname{dn}(c_2 y, \sqrt{v_2}) / \operatorname{cn}(c_1 x, \sqrt{v_1}), \quad v_1 = 0.1, \quad v_2 = 0.99999.$$

В трехмерной форме она даёт поверхностную текстуру разрывного вида, см. Рис. 7.



**Рис. 7.** Форма поверхности при наличии разрыва.

Возможно распределение деформаций в плоскости OZ (поперечного сечения бруса) с более сложным нарушением сплошности поверхности (Рис. 8).

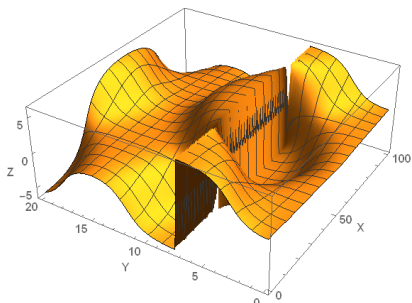


**Рис. 8.** Распределение частиц при наличии разрыва сложной формы.

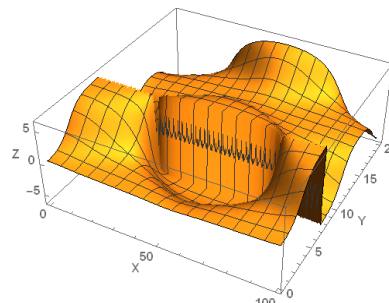
В этом случае решение системы (4.4), (4.5) имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{u_x}{4} = a_x \operatorname{cn}(c_1 x, \sqrt{v_1}) / \operatorname{cn}(c_2 y, \sqrt{v_2}), \quad \operatorname{tg} \frac{u_y}{4} = a_y \operatorname{cn}(c_1 x, \sqrt{v_1}) / \operatorname{cn}(c_2 y, \sqrt{v_2}), \quad v_1 = 0.9, \quad v_2 = 0.99999.$$

В трехмерной же форме имеем поверхностную картину вида, представленного на Рис. 9. В другом ракурсе эта же картина имеет вид, изображенный на Рис. 10.



**Рис. 9.** Форма поверхности при наличии сложного разрыва.



**Рис. 10.** Форма поверхности при наличии сложного разрыва с другого ракурса.

Вообще говоря, возможны и другие искажения поверхностных распределений частиц. Это зависит от природы поверхностей и свойств частиц. Все это позволяет использовать предлагаемую теорию для изучения возникновения поверхностных искажений.



## 7. Окончательные результаты

Теперь обратимся к решению исходной задачи (2.3)-(2.5). Для объединённой функции смещений и микросмещений (3.6), записанной выше через единую гармоническую функцию  $\chi$  получим, вообще говоря, что

$$\nabla^2 \chi = \lambda \cdot \operatorname{div}(U + c_4 s u) + f_3(y) + f_4(x) \quad (7.1)$$

или

$$\nabla^2 \chi = \lambda_4 \cdot \operatorname{div} U + c_4 \cdot \operatorname{div} u. \quad (7.2)$$

Очевидно, можно говорить о двух гармонических функциях и соответствующих им внутренних структурах, возникающих в рассматриваемой здесь модели среды с МП. Соответствующие поверхностные формы распространяются с разными скоростями. Среда становится двулучепреломляющей в отличие от классической одноосной упругой среды!

Располагая этим результатом можно найти, как это указывается в [1], продольное напряжение

$$\sigma_{zz} = \sigma \nabla^2 \chi. \quad (7.3)$$

Полное же единое описание всех компонент напряжения требует введения уже бигармонической функции. Функция  $\chi$  является бигармонической, если она удовлетворяет обобщённому уравнению вида

$$\Delta \Delta \chi = \nabla^4 \chi = 0. \quad (7.4)$$

Решение этого известного уравнения обеспечивает частное точное решение двумерной задачи для напряжений.

## 8. Заключение

В заключение стоит отметить, что имеющиеся в литературе попытки построить теорию МФП не привели к созданию математической модели, анализ которой позволил бы описать количественно совокупность эффектов, характерных для таких переходов. Наш подход основан на таких фундаментальных свойствах, как существование трансляционной симметрии при относительности смещения подрешеток и наличии взаимодействия, эффективно билинейного по полю деформаций и градиентам смещения подрешеток. Соответствующая математическая модель, допускающая аналитическое решение, приводит к системе уравнений, состоящей из уравнения типа синус-Гордона, дополненного уравнением нелинейной теории упругости. Мы показали, что такая система уравнений обладает набором решений, описывающих несоразмерные структуры, типичные для дифракционных картин рассеяния в области МФП.

В наших предыдущих работах был рассмотрен случай так называемого реечного мартенсита – образцы неограниченной длины, но ограниченной ширины. В настоящей же статье рассмотрена так называемая плоская деформация. Речь идёт о трехмерном теле произвольного сечения в плоскости (X,Y), когда вдоль направления OZ развивается поле однородных напряжений ( $\sigma_{zz} = \text{const}$ ), обеспечивающих постоянство длины тела. В принятой модели, учитывающей и внутренние микросмещения, это вынуждает решать систему двух связанных уравнений синус-Гордона. По мнению авторов, это не имеет прецедента в литературе. Полученные общие результаты могут быть использованы при решении нетривиальной практической проблемы закалки образцов произвольной формы.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-01-00068-а и № 13-02-91332-ННIO\_а.*

**Литература**

- [1] М.Борн, Хуан Кунь, *Динамическая теория кристаллических решеток* (И.Л., М., 1958).
- [2] Косевич А.М. *Теория кристаллической решетки*. (Вища школа, Харьков, 1988).
- [3] E.L. Aero, A.L. Korzhenevskii // *Materials Physics and Mechanics* **21** (2014) 58.
- [4] E.L. Aero, A.L. Korzhenevskii, A.N. Bulygin // *Materials Physics and Mechanics* **21** (2014) 230.
- [5] P. Toledano, V. Dmitriev, *Reconstructive phase transitions* (World Scientific, Singapore, 1996).
- [6] A.L. Korzhenevskii, V. Dmitriev // *Journal of Physics: Condensed Matter* **27** (2015) 375401.

## THE THEORY OF PLANE DEFORMATION UNDER THE CONDITIONS OF AUSTENITE-MARTENSITE TRANSFORMATION

**E.L. Aero\*, A.L. Korzhenevskii, A.N. Bulygin**

Institute for Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,

Bol'shoi prosp. 61, Vasilievskii Ostrov, St. Petersburg, 199178, Russia

\*e-mail: 16aero@mail.ru

**Abstract.** The analytical approach of a plane deformation of a plate experiencing austenite-martensite transformation is developed. The thin plate is considered which energy takes into account the appearance of the martensitic transformation besides large elastic strains. The former generates specific microstrains that destroy compactness and translational order of the original perfect crystal. Making use of the previously analyzed model of a complex lattice consisting from two mutually penetrating sublattices enable us to describe both the long and the short possible destruction of the crystal order. The conservation of the polar momentum that is coupled with a mutual shift of the sublattices is taken into account. A possible cardinal reconstruction of the whole lattice and in particular the change of the number of the nearest atomic neighbours is allowed in contrast to the classical Landau theory of phase transitions. It is relaxing of the latter restriction in our theory that enables us to apply it to crystals experiencing martensitic transformations.

**Acknowledgement**

*This work was supported by grants RFBR № 16-01-00068-a and №13-02-91332- NNIO\_a.*

**References**

- [1] M. Born, K. Huang, *Dynamical theory of crystal lattices* (Clarendon Press, Oxford, 1954).
- [2] A.M. Kosevich, *The Crystal Lattice: Phonons, Solitons, Dislocations, Superlattices* (Wiley-VCH, 2006).
- [3] E.L. Aero, A.L. Korzhenevskii // *Materials Physics and Mechanics* **21** (2014) 58.
- [4] E.L. Aero, A.L. Korzhenevskii, A.N. Bulygin // *Materials Physics and Mechanics* **21** (2014) 230.
- [5] P. Toledano, V. Dmitriev, *Reconstructive phase transitions* (World Scientific, Singapore, 1996).
- [6] A.L. Korzhenevskii, V. Dmitriev // *Journal of Physics: Condensed Matter* **27** (2015) 375401.