

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ МАТЕРИАЛА С УСЛОЖНЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

А.А. Трещев, М.В. Спасская*

ФГБОУ ВПО Тульский государственный университет, пр. Ленина 92, г. Тула, 300012, Россия

*e-mail: ma71ruska@mail.ru

Аннотация. В работе разбирается задача о круговой цилиндрической оболочке, воспринимающей равномерно распределенную нагрузку. Оболочка выполнена из материала с усложненными свойствами, а именно обладает свойством разносопротивляемости и ортотропии. В статье приведена система разрешающих уравнений поставленной задачи исследования, дополненная граничными условиями. Рассмотрено решение конкретной задачи изгиба оболочки, представлены наиболее характерные данные исследования НДС и выполнен анализ результатов расчета по классической теории при постоянных механических характеристиках с данными, полученными по предложенной модели с учетом разносопротивляемости.

1. Введение

В современной технике и в строительстве все чаще используются новые конструкционные материалы, обладающие усложненными свойствами. В основном это материалы, обладающие свойствами анизотропии и разносопротивляемости. Анизотропный материал – материал, который по разным направлениям имеет разные физико-механические свойства. Разносопротивляющийся - это материал, у которого проявляется зависимость деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния. Подобная зависимость обнаружена не только у новых материалов, каковыми являются различные композитные составы, полимеры, графиты, стеклопластики, но и у традиционных конструкционных материалов типа железобетона.

Использование классических теорий механики деформируемого твердого тела не позволяет обеспечить должную безопасность конструкций из разносопротивляющихся материалов. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов является достаточно новой актуальной областью механики деформируемого твердого тела. При этом в настоящее время в химической промышленности, строительстве, машино- и авиастроительных отраслях все больше применяются особо ответственные конструкции. Именно поэтому необходимы надежные теории расчета, согласованные с экспериментальными данными. Учет эффекта разносопротивляемости материала вносит значительные поправки в напряженно-деформированное состояние конструкций. Целью работы является определение напряженно-деформированного состояния круговой цилиндрической оболочки. Для этого необходимо адаптировать определяющие соотношения максимально согласованные с экспериментальными данными, каковыми являются уравнения состояния [1], применительно к рассматриваемому типу конструкций, получить систему разрешающих

Выражения (1)–(4) являются кинематическими соотношениями. Они справедливы для теории пологих оболочек в квадратичном приближении при малых упругих деформациях.

Для конкретизации структурной анизотропии материала оболочки принято ортотропное тело. В качестве физических зависимостей будем использовать упомянутые соотношения А.А. Трещева [1], которые с учётом принятых гипотез и при совпадении осей цилиндрической системы координат с главными осями анизотропии запишем в виде:

$$\begin{aligned} e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22}; \\ e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22}; \\ e_{12} &= (A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12})\tau_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

где A_{kkkk} , B_{kkkk} , A_{ijij} , B_{ijij} , A_{ijij} , B_{ijij} – константы, зависящие от модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации материала; $\alpha_{ij} = \sigma_{ij} / S$ – нормированные напряжения; $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ – модуль вектора полных напряжений.

Вычисление констант определяющих соотношений для ортотропных материалов рекомендовано выполнять по результатам простейших экспериментов на одноосное растяжение и одноосное сжатие вдоль главных осей анизотропии, а также из экспериментов на сдвиг в главных плоскостях или из экспериментов по одноосному растяжению и одноосному сжатию в направлениях, ориентированных под углом 45° к главным осям анизотропии. При этом константы для ортотропного тела вычисляются следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; & B_{kkkk} &= (1/E_k^+ - 1/E_k^-)/2; \\ A_{ijij} &= -(v_{ij}^+/E_j^+ + v_{ij}^-/E_j^-)/2; & B_{ijij} &= -(v_{ij}^+/E_j^+ - v_{ij}^-/E_j^-)/2; \\ A_{ijij} &= (1/E_{ij}^+ + 1/E_{ij}^-) - 0.25 \left[\begin{aligned} &(1/E_i^+ + 1/E_j^+ + 1/E_i^- + 1/E_j^-) - \\ &- 2(v_{ji}^+/E_i^+ + v_{ji}^-/E_i^-) \end{aligned} \right]; \\ B_{ijij} &= \sqrt{2}(1/E_{ij}^+ - 1/E_{ij}^-) - 0.125 \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\begin{aligned} &(1/E_i^+ + 1/E_j^+ - 1/E_i^- - 1/E_j^-) - \\ &- 4(v_{ji}^+/E_i^+ - v_{ji}^-/E_i^-) \end{aligned} \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

где $v_{ij}^+/E_j^+ = v_{ji}^+/E_i^+$; $v_{ij}^-/E_j^- = v_{ji}^-/E_i^-$; E_k^\pm , E_i^\pm , E_j^\pm – модули упругости при растяжении и сжатии в направлениях, соответствующих главным осям анизотропии; v_{ij}^\pm , v_{ji}^\pm – коэффициенты поперечной деформаций при растяжении и сжатии в направлениях соответствующих главным осям анизотропии; E_{ij}^\pm – модули упругости при растяжении и сжатии в направлениях под углом 45° к соответствующим главным осям анизотропии.

Для рассматриваемого материала ПЗ6-50 [3] механические характеристики представлены в таблице 1.

Таблица 1. Механические характеристики материала ПЗ6-50

E_1^+	E_1^-	E_2^+	E_2^-	ν_{12}^+	ν_{12}^-
10,3 ГПа	11,77 ГПа	17,6 ГПа	18,54 ГПа	0,188	0,215

Проинтегрировав соотношения для напряжений (7) по толщине оболочки в соответствии с правилами (10) и подставив полученные зависимости для поперечной силы в уравнение равновесия (12), приходим к первому разрешающему уравнению в смешанном виде. Кроме того, используя уравнение неразрывности деформаций (12), окончательно формируем систему двух дифференциальных уравнений в смешанном виде относительно неизвестных угла поворота и продольной силы в направлении β_1 :

$$\begin{cases} \theta_{1,1} + RL_{22}N_{2,11} = -R\eta_{2,11}; \\ \theta_{1,11} - \frac{1}{RP_{11}}N_2 = -\frac{1}{P_{11}}q_3 + \frac{1}{P_{11}}J_{11,1}, \end{cases} \quad (13)$$

где $L_{22} = \frac{C_{11}}{(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)h}$; $P_{11} = C_{11}h^3/12$;

$$\eta_2 = -\frac{C_{12}}{(C_{11}C_{22} - C_{12}^2) \cdot h}I_{11} + L_{22}I_{22}; \quad I_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} D_{ij}d\beta_3; \quad J_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} D_{ij}\beta_3d\beta_3;$$

Граничные условия жесткого закрепления при $\beta_1 = 0$:

$$\theta_1 = 0; \quad \varepsilon_1 = 0; \quad \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -\eta_2/L.$$

Полученные разрешающие дифференциальные уравнения достаточно сложны, поэтому для их решения следует прибегать к численным методам, из которых в данном случае наиболее просто реализуется метод конечных разностей [5]. Разрешающие уравнения в форме метода конечных разностей здесь не приводятся ввиду их чрезмерной громоздкости. Система полученных алгебраических уравнений решается методом Гаусса.

4. Решение тестовой задачи, анализ полученных результатов

Приведем некоторые наиболее характерные результаты расчета напряженно-деформированного состояния описанной выше оболочки, а именно прогибы оболочки, осевые и касательные напряжения.

Проведем сравнение результатов расчета по предложенной модели с учетом разнородности с данными, полученными по классической теории при постоянных механических характеристиках ортотропного материала.

На рисунке 2 показано, что расхождение в значениях максимальных прогибов с учетом и без учета разнородности значительное и составляет 36,7 %.

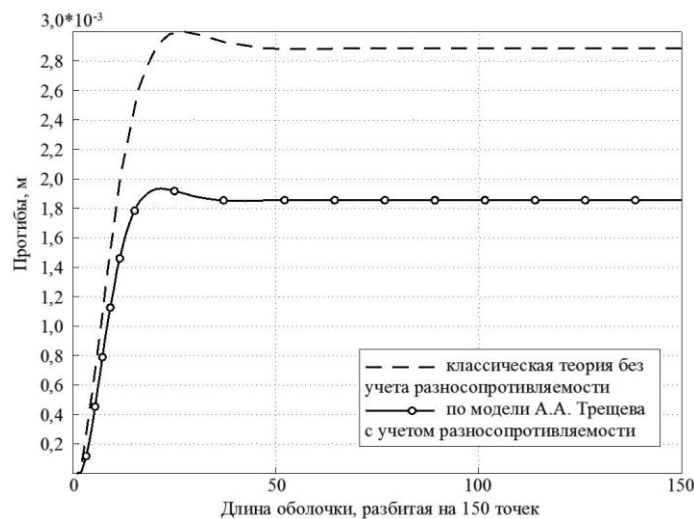


Рис. 2. Прогибы оболочки, м.

Как видно из рисунка 3, для окружных напряжений в заделке значения без учета разнородности больше на 69,8 %, чем с ее учетом. Однако, для максимальных значений растягивающих окружных напряжений данные с учетом разнородности превосходят результаты без ее учета незначительно, а именно на 5,6 %, кроме того, на расстоянии $0,3L-L$ разница в данных также невелика.

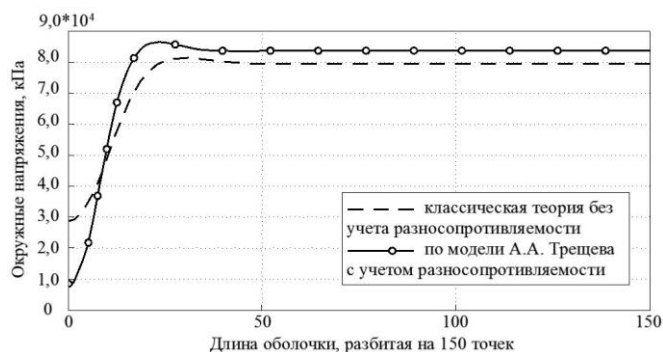


Рис. 3. Окружные напряжения, кПа.

На рисунке 4 представлены осевые напряжения. Для них значения, полученные без учета разнородности, в заделке превышают результаты, соответствующие модели, учитывающей разнородность материала на 34,6 %. Для максимальных сжимающих осевых напряжений значение без учета разнородности превосходит результат с ее учетом на 48 %.

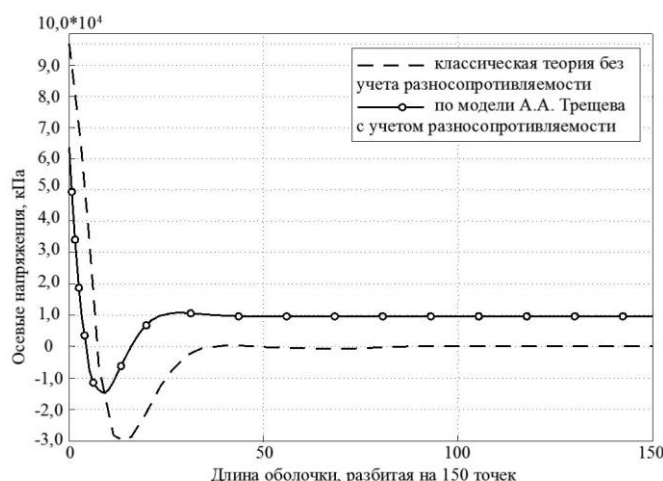


Рис. 4. Осевые напряжения, кПа.

Проанализировав результаты, представленные на рисунках 2-4, можно сделать вывод, что учет влияния разнородности при расчете цилиндрических оболочек значительно влияет на точность расчета параметров напряженно-деформированного состояния.

5. Вывод

Решение задач на основе классических теорий механики деформируемого твердого тела не позволяет обеспечить должную безопасность конструкций, выполненных из ортотропных разнородных материалов. Учет зависимости деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния вносит значительные поправки в результаты исследований, а поэтому необходим для получения достоверных результатов расчета. Это также подтверждается решениями аналогичных задач [6, 7].

Литература

- [1] А.А. Трещёв, *Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения* (ТулГУ, Тула, 2008).
- [2] С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, *Пластинки и оболочки* (Наука, М., 1966).
- [3] А.В. Розе, И.Г. Жигулин, М.Н. Душин // *Механика полимеров* **3** (1970) 471.
- [4] А.А. Ильюшин, *Пластичность* (Изд-во АН СССР, М., 1963).
- [5] П.М. Варвак, Л.П. Варвак, *Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций* (Стройиздат, М., 1977).
- [6] А.А. Трещев, М.В. Спасская // *Известия ТулГУ. Технические науки* **11** (2014) 603.
- [7] М.В. Спасская, А.А. Трещёв // *Строительство и реконструкция* **3(59)** (2015) 53.

STRESS-STRAIN STATE CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL MADE OF MATERIALS WITH COMPLICATED PROPERTIES

A.A. Treschev, M.V. Spasskaya*

Tula State University, Lenin Prospect 92, Tula, 300012, Russian Federation

*e-mail: ma71ruska@mail.ru

Abstract. The article is devoted the task of the circular cylindrical shell, is perceiving uniformly distributed load. The shell made of material with complicated properties, it has the property of different resistance and orthotropic. The article shows the system of resolving equations of the problem of research, supplemented by the boundary conditions. Gives the solution of the specific task of bending of the shell, shows most typical results of a study of stress-strain state and the analysis of results of calculation by the classical theory under constant mechanical characteristics with data by the proposed model under different resistant.

References

- [1] A.A. Treschev, *The Theory of Deformation and durabilities for the Materials, sensitive to a kind of stress condition. Determining Correlations* (TSU, Tula, 2008). (In Russian).
- [2] S.P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells* (McGraw-Hill book company, New York, Toronto, London, 1959).
- [3] A.V. Rose, I.G. Zhigulin, M.N. Dushyn // *Mechanics of Polymers* **3** (1970) 471.
- [4] A.A. Ilyushin, *Plasticity* (Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1963). (In Russian).
- [5] P.M. Varvak, L.P. Varvak *The grid method in problems of calculation of building structures* (Stroyizdat, Moscow, 1977). (In Russian).
- [6] A.A. Treschev, M.V. Spasskaya // *Proceedings of the TSU. Engineering* **11** (2014) 603.
- [7] M.V. Spasskaya, A.A. Treschev // *Building and reconstruction* **3(59)** (2015) 53.