

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ БУШЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ МОД В ГРАФЕНЕ

Ю.А. Баимова<sup>1,2\*</sup>, С.А. Щербинин<sup>3</sup>, Г.М. Чечин<sup>3</sup>, С.В. Дмитриев<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем сверхпластичности металлов Российской академии наук, Уфа, ул. Степана

Халтурина, 39, 450001, Россия

<sup>2</sup>Башкирский государственный университет, Уфа, ул. Заки Валиди, 32, 450076, Россия

<sup>3</sup>Южный федеральный университет, НИИ физики, Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 194, 344090, Россия

<sup>4</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, пр. Ленина, 36,  
634050, Россия

\*e-mail: julia.a.baimova@gmail.com

**Аннотация.** Ранее было доказано, что в графене могут существовать четыре одномерных буша (продиктованные симметрией решетки делокализованные нелинейные колебательные моды), описывающих атомные колебания в плоскости листа этого материала. В настоящей работе методом молекулярной динамики исследуется устойчивость двух из них. Установлено, что при амплитудах колебаний, больших некоторого критического значения, буши теряют устойчивость, и показатель критической экспоненты возрастает линейно с ростом амплитуды выше критической.

**Ключевые слова:** графен, буши нелинейных мод, молекулярная динамика.

### 1. Введение

При исследовании динамики высокоамплитудных колебаний любой физической системы важную роль играет нелинейность, которая для широкого круга материалов может приводить к возможности существования различных пространственно локализованных и делокализованных динамических объектов, таких как дискретные бризеры [1-5], солитоны [6, 7], нелинейные нормальные моды и их буши [8-13] и др.

Особый интерес представляет исследование этих динамических объектов в различных углеродных структурах. Была показана возможность существования дискретных бризеров в монослойном графене и на краю графеновых нанолент [14-20], углеродных нанотрубках и фуллеренах [21-24], графене (наводороженном графене) [25-27]. Подобные нелинейные объекты могут влиять на процесс появления дефектов [23], разрыв связей в структуре и на различные механические свойства материалов.

В отличие от дискретных бризеров, которые являются пространственно локализованными динамическими объектами, буши нелинейных нормальных мод представляют собой некоторый класс делокализованных ангармонических колебаний в системах с дискретной симметрией. Существенно, что они являются точными решениями соответствующих нелинейных динамических уравнений [28, 29, 30]. Их структура определяется с помощью теоретико-групповых методов [31] и не зависит от конкретного вида межатомных взаимодействий. Особый интерес представляют собой одномерные буши, поскольку им отвечают периодические колебания атомов кристалла.

В работе [32] было доказано, что в графене могут существовать четыре типа одномерных бушей. В работе [33] их динамические свойства были изучены в рамках *ab*

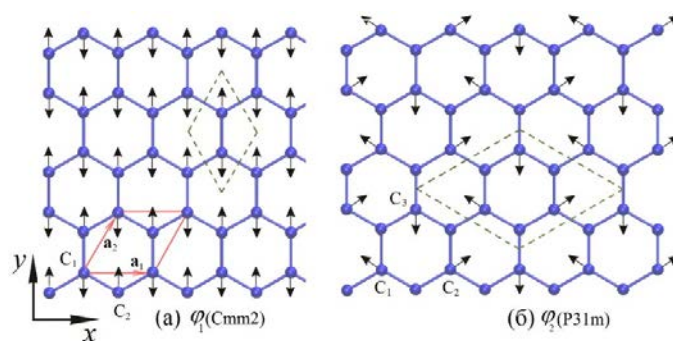
*initio* моделирования на основе теории функционала плотности на относительно малых временных интервалах. С другой стороны, важной задачей при исследовании бушей мод является анализ их устойчивости на больших временах, что трудно осуществить с помощью расчетов из первых принципов, поскольку они требуют больших временных затрат. В настоящей работе для решения этой задачи применен существенно более быстрый метод молекулярной динамики. Этот метод основан на решении классических уравнений движения Ньютона с некоторыми феноменологическими потенциалами межатомного взаимодействия. Методы молекулярной динамики успешно применялись для исследования различных нелинейных явлений в графене, углеродных нанотрубках и графеновых нанолентах [15, 17, 18, 25, 34].

Во многих работах было показано, что дискретные бризеры могут потерять устойчивость при малых искажениях их профилей, в частности, при учёте тепловых атомных колебаний [19]. Аналогичная ситуация имеет место и для бушей нелинейных нормальных мод (см., например, [35 - 37]).

Целью данной работы является исследование устойчивости двух из четырёх вышеупомянутых одномерных бушей нелинейных нормальных мод в графене методами молекулярной динамики. При проведении молекулярно-динамических расчётов нами был использован стандартный набор межатомных потенциалов [34], который ранее успешно применялся при исследовании различных свойств углеродных структур.

## 2. Описание модели

Примитивная ячейка графена, определяемая векторами трансляции  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ , содержит два атома, каждый из которых имеет три степени свободы – компоненты вектора смещения. Ось  $x$  совпадает с направлением «зигзаг», а ось  $y$  – с направлением «кресло». На рис. 1 показаны колебательные паттерны рассматриваемых в работе двух типов одномерных бушей, где стрелками указаны смещения атомов из своих положений равновесия в плоскости листа графена. Пунктирными рамками выделены ячейки повторяемости колебательного состояния решётки графена.



**Рис. 1.** Два одномерных буша а)  $\phi_1$  и б)  $\phi_2$ . Стрелками показаны атомные смещения.

Взаимодействие атомов углерода описывается потенциалом [34], сконструированным из стандартного набора межатомных потенциалов и учитывающим влияние на энергию системы деформации валентных связей, валентных и торсионных углов. Данный потенциал был успешно апробирован для решения целого ряда проблем в углеродных структурах [15, 16, 22, 34, 38, 39].

Существенным отличием двух исследуемых нами бушей является разная мультипликация соответствующих им элементарных ячеек колебательного состояния решётки графена по отношению к размеру элементарной ячейки в её равновесном состоянии. Именно, кратность мультипликации в случае буша  $\phi_1$  равна 1, а в случае буша

$\varphi_2$  – 3. В связи с этим, выбранный нами при моделировании расчётный фрагмент для буша  $\varphi_1$  состоит из  $16 \times 16$  элементарных ячеек графена, а для буша  $\varphi_2$  – из  $12 \times 6$  ячеек.

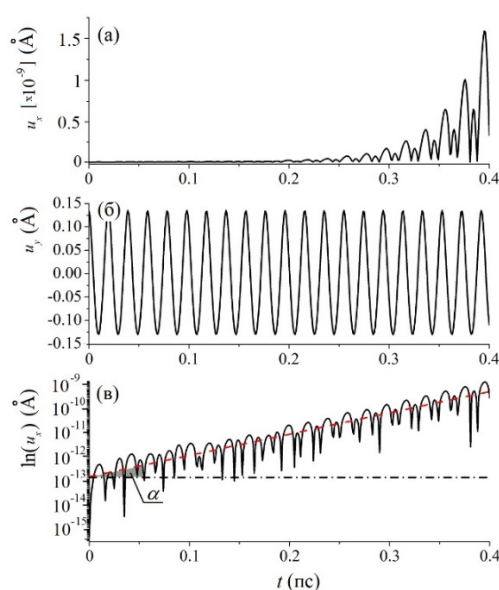
Вдоль обеих осей,  $x$  и  $y$ , задавались периодические граничные условия. Начальные же условия при решении классических динамических уравнений определялись заданием положений атомов графена в соответствии с их смещениями, приведёнными на рис. 1. Начальные скорости всех атомов полагались равными нулю.

В паттерне буша  $\varphi_1$  различаются два типа атомов,  $C_1$  и  $C_2$ , которые получили в начальный момент времени одинаковые по величине и различные по знаку смещения вдоль оси  $y$ . В ячейке повторяемости паттерна буша  $\varphi_2$  содержится 6 атомов, три из которых остаются неподвижными в течение временной эволюции этого буша. Три других атома на рис. 1 обозначены буквами  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Атом  $C_3$  имеет в начальный момент времени отрицательное по величине смещение в направлении оси  $y$ , а атомы  $C_1$  и  $C_2$  имеют такие же по величине смещения под углом  $60^\circ$  к оси  $y$  с противоположными по знаку проекциями на ось  $x$ .

Исходя из вышеуказанных начальных условий, для каждого из бушей  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  проводилось численное решение уравнений Ньютона методом Верле.

Из теории бушей мод известно, что при достаточно больших амплитудах рассматриваемый буш может потерять свою устойчивость, в результате чего он переходит в буш большей размерности и меньшей симметрии. По определению, одномерные буши характеризуются лишь одной степенью свободы. В случае рассматриваемых нами бушей эта степень свободы определяется величиной смещения одного атома углерода, поскольку все движущиеся атомы листа графена в любой момент времени имеют одинаковые по величине (но, быть может, разные по направлению) смещения. В случае же потери устойчивости динамического режима, в его колебательном паттерне появляются дополнительные степени свободы. Для исследуемых нами бушей потеря устойчивости проявляется в том, что у некоторых атомов возникает проекция вектора смещения вдоль оси  $x$ , которая отсутствовала при устойчивом движении данного буша.

Оказалось, что для установления факта потери устойчивости буша  $\varphi_1$  достаточно отслеживать дополнительное смещение вдоль оси  $x$  атома типа  $C_1$ , а для буша  $\varphi_2$  – смещение вдоль оси  $x$  атома типа  $C_3$ .

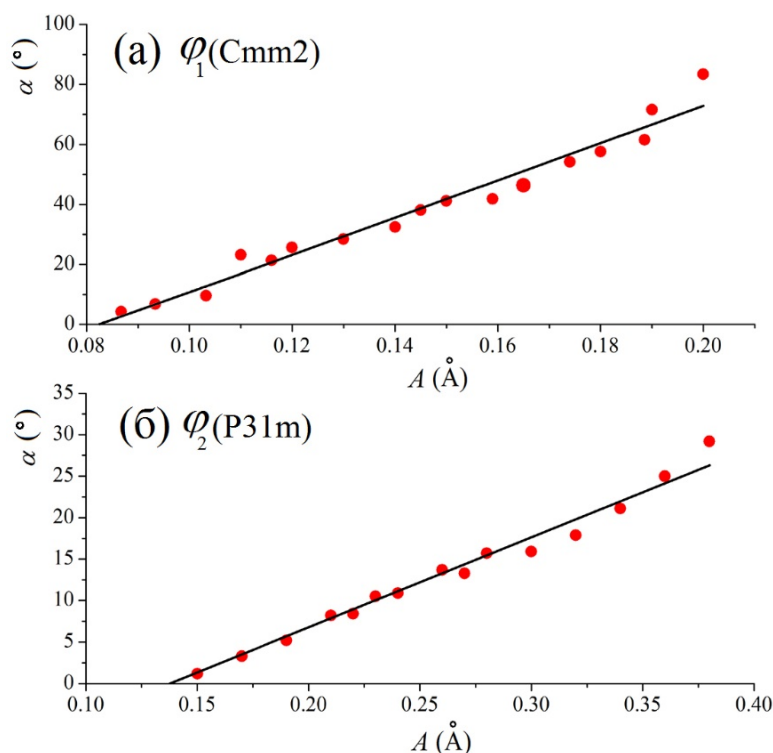


**Рис. 2.** (а, б) Смещения  $u_x(t)$  и  $u_y(t)$  вдоль осей  $x$  и  $y$ , соответственно, для атома  $C_1$  в случае одномерного буша  $\varphi_1$  при начальной амплитуде  $A = 0.125 \text{ \AA}$ . На (в) величина смещения  $u_x(t)$  представлена в логарифмическом масштабе.

### 3. Результаты и обсуждение

На рис. 2а для буша  $\varphi_1$  при начальной амплитуде  $A = 0.125 \text{ \AA}$  показана зависимость от времени смещений  $u_x$  и  $u_y$  атома типа  $C_1$  вдоль направлений  $x$  и  $y$ , соответственно. Величина смещения атома вдоль оси  $z$ , то есть колебания из плоскости листа графена, не отличалась от 0 с высокой точностью на протяжении всего времени моделирования, в силу чего проекция  $u_z$  на рисунке не представлена. Как видно из этого рисунка, на начальном этапе движения колебания вдоль оси  $x$  отсутствуют ( $u_x(t)=0$ ), однако с течением времени эта компонента смещения нарастает от нулевого значения за счёт неустойчивости рассматриваемого буша. На рис. 2в смещение  $u_x(t)$  показано в логарифмическом масштабе, откуда видно, что степень неустойчивости режима со временем линейно увеличивается. Это поведение может быть описано выражением  $u_x(t) \sim A \cdot e^{\alpha t}$ , где  $A$  – начальная амплитуда смещения атома,  $\alpha$  – угол наклона кривой линейной аппроксимации, которая показана на рис. 2в пунктирной линией. В случае буша  $\varphi_2$  подобные графики были построены для атома типа  $C_3$ .

Нами производилась оценка угла наклона  $\alpha$ , показанного на рис. 2(в), для различных амплитуд колебаний бушей. Результаты представлены на рис. 3 для бушей  $\varphi_1$  (а) и  $\varphi_2$  (б). Данные результаты позволяют оценить амплитуду колебаний атомов углерода, при которой в системе не будет возникать неустойчивость. Такой критической амплитуде соответствует точка пересечения аппроксимирующей прямой на Рис. 3 с осью абсцисс. Из этих графиков видно, что минимальная амплитуда возбуждения атома, при которой сохраняется устойчивость буша  $\varphi_1$ , составляет  $0.082 \text{ \AA}$ , а для буша  $\varphi_2$  –  $0.138 \text{ \AA}$ . Полученные результаты свидетельствуют о большей устойчивости одномерного буша  $\varphi_2$  по сравнению с бушем  $\varphi_1$ .



**Рис. 3.** Зависимость параметра  $\alpha$  от амплитуды смещений атома  $C_1$  для буша  $\varphi_1$  (а) и атома  $C_3$  для буша  $\varphi_2$  (б). В скобках на рисунках а) и б) указаны группы пространственной симметрии исследуемых бушей.

#### 4. Заключение

В настоящей работе методом молекулярной динамики с использованием стандартного набора межатомных потенциалов исследована устойчивость найденных в работе [32] двух одномерных бушей нелинейных нормальных мод на больших временных интервалах. Найденны критические значения начальных атомных амплитуд бушей, выше которых происходит потеря устойчивости этих бушей.

Поскольку при потере устойчивости данного буша он должен перейти в некоторый другой буш большей размерности и меньшей симметрии, представляет интерес исследование этого ожидаемого явления, как и процесса потери устойчивости других типов возможных в графене бушей мод, в частности, многомерных.

В последующих работах предполагается выяснить, каковы буши нормальных нелинейных мод в нитриде бора [40], который имеет гексагональную решетку, как и графен, но в примитивной трансляционной ячейке данного двумерного кристалла находятся два различных атома (N и B).

Отметим, что в некоторых случаях буши нелинейных мод могут использоваться для инициализации дискретных бризеров путем наложения локализирующих функций [41].

В перспективе возможно исследование устойчивости бушей мод с использованием первопринципного моделирования [42,43].

*Б.Ю.А. благодарит за финансовую поддержку стипендию Президента РФ молодым ученым и аспирантам (СП-4037.2015.1). Визит Щ.С.А в Уфу, ИПСМ РАН был поддержан грантом Российского научного фонда № 14-13-00982. Ч.Г.М. благодарит за финансовую поддержку Министерство Образования и Науки Российской Федерации (базовая часть государственного задания, проект №. 3.5710.2017/8.9). Д.С.В. благодарит грант Российского научного фонда № 16-12-10175.*

#### Литература

- [1] S.V. Dmitriev, E.A. Korznikova, J.A. Baimova, M.G. Velarde // *Physics-Uspekhi* **59** (2016) 446.
- [2] С.В. Дмитриев // *Письма о материалах* **1** (2011) 78.
- [3] С.В. Дмитриев, Ю.А. Баимова // *Письма в Журнал технической физики* **37** (2011) 13.
- [4] П.В. Захаров, А.М. Ерёмин, М.Д. Старостенков, А.В. Маркидонов, И.С. Луценко // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения* **12** (2015) 146.
- [5] П.В. Захаров, М.Д. Старостенков, А.М. Ерёмин // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения* **13** (2016) 223.
- [6] Л.И. Маневич, А.В. Савин, В.В. Смирнов, С.Н. Волков // *Успехи физических наук* **164** (1994) 937.
- [7] В.В. Киселев, А.А. Расковалов // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения* **13** (2016) 19.
- [8] G. Chechin, D. Sizintsev, O. Usoltsev // *Letters on Materials* **6** (2016) 146.
- [9] G. Chechin, D. Sizintsev, O. Usoltsev // *Letters on Materials* **6** (2016) 309.
- [10] G. Chechin, D. Sizintsev, O. Usoltsev // *Computational Materials Science* **138** (2017) 353.
- [11] G.M. Chechin, S.A. Shcherbinin // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations* **22** (2015) 244.
- [12] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin // *Physical Review E* **92** (2015) 012907.
- [13] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin // *Letters on Materials* **6** (2016) 9.
- [14] Y. Yamayose, Y. Kinoshita, Y. Doi, A. Nakatani, T. Kitamura // *Europhysics Letters* **80** (2007) 40008.
- [15] E.A. Korznikova, J.A. Baimova, S.V. Dmitriev // *Europhysics Letters* **102** (2013) 60004.

- [16] Ю.А. Баимова, А.Б. Ямилова, И.П. Лобзенко, С.В. Дмитриев, Г.М. Чечин // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения* **11** (2014) 599.
- [17] Е.А. Корзникова, А.В. Савин, Ю.А. Баимова, С.В. Дмитриев, Р.Р. Мулюков // *Письма в журнал экспериментальной и технической физики* **96** (2012) 238.
- [18] Л.З. Хадеева, С.В. Дмитриев, Ю.С. Кившарь // *Письма в журнал экспериментальной и технической физики* **94** (2011) 580.
- [19] Y. Doi, A. Nakatani // *Procedia Engineering* **10** (2011) 3393.
- [20] Y. Doi, A. Nakatani // *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering* **6** (2012) 71.
- [21] Y. Kinoshita, Y. Yamayose, Y. Doi, A. Nakatani, T. Kitamura // *Physical Review B* **77** (2008) 024307.
- [22] A.V. Savin, Y.S. Kivshar // *Europhysics Letters* **82** (2008) 66002.
- [23] T. Shimada, D. Shirasaki, T. Kitamura // *Physical Review B* **81** (2010) 035401.
- [24] A.V. Savin, Y.S. Kivshar // *Physical Review B* **85** (2008) 125427.
- [25] B. Liu, J.A. Baimova, K. Zhou et al // *Journal of Physics D: Applied Physics* **46** (2013) 305302.
- [26] G.M. Chechin, S.V. Dmitriev, I.P. Lobzenko, D.S. Ryabov // *Physical Review B* **90** (2014) 045432.
- [27] A.V. Savin, L.I. Manevitch // *Physical Review B* **67** (2003) 144302.
- [28] В. П. Сахненко, Г.М. Чечин // *Доклады академии наук* **330** (1993) 308.
- [29] В. П. Сахненко, Г. М. Чечин // *Доклады академии наук* **338** (1994) 42.
- [30] G.M. Chechin, V.P. Sakhnenko // *Physica D* **117** (1998) 43.
- [31] G. M. Chechin // *Computers & Mathematics with Applications* **17** (1989) 255.
- [32] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin // *Letters on Materials* **6** (2016) 9.
- [33] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin // *Letters on Materials* **7(4)** (2017) 367.
- [34] A.V. Savin, Yu. S. Kivshar // *Europhysics Letters* **89** (2010) 46001.
- [35] G. M. Chechin, D.S. Ryabov, K.G. Zhukov // *Physica D* **203** (2005) 121.
- [36] G.M. Chechin, A. V. Gnezdilov, M. Yu Zekhtser // *International Journal of Non-Linear Mechanics* **2003** (2015) 1451.
- [37] G.M. Chechin, S.A. Shcherbinin // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations* **22** (2015) 244.
- [38] A.V. Savin, Yu. S. Kivshar // *Physical Review B* **81** (2010) 165418.
- [39] A.V. Savin, Yu. S. Kivshar, B. Hu // *Physical Review B* **82** (2010) 195422.
- [40] E. Barani, E.A. Korznikova, A.P. Chetverikov, K. Zhou, S.V. Dmitriev // *Physics Letters A* **381** (2017) 3553.
- [41] E. Barani, I.P. Lobzenko, E.A. Korznikova, E.G. Soboleva, S.V. Dmitriev, K. Zhou, A.M. Marjaneh // *European Physics Journal B* **90** (2017) 38.
- [42] I.P. Lobzenko, G.M. Chechin, G.S. Bezuglova, Y.A. Baimova, E.A. Korznikova, S.V. Dmitriev // *Physics of the Solid State* **58** (2016) 633.
- [43] G.M. Chechin, S.V. Dmitriev, I.P. Lobzenko, D.S. Ryabov // *Physical Review B* **90** (2014) 045432.

# ON THE STABILITY OF ONE-DIMENSIONAL BUSHES IN GRAPHENE

J.A. Baimova<sup>1,2\*</sup>, S.A. Shcherbinin<sup>3</sup>, G.M. Chechin<sup>3</sup>, S.V. Dmitriev<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup>Institute for Metals Superplasticity Problems, Russian Academy of Science, Khalturina 49, Ufa, 450001, Russia

<sup>2</sup>Bashkir State University, Z. Validi str., 32, Ufa, 450076, Russia

<sup>3</sup>Southern Federal University Research institute of physics, Rostov-on-Don, Stachki ave. 194, 344090, Russia

<sup>4</sup>National Research Tomsk State University, Lenin ave. 36, 634050, Tomsk, Russia

\*e-mail: julia.a.baimova@gmail.com

**Abstract.** Earlier it has been proved that graphene supports four one-dimensional bushes (symmetry dictated, delocalized nonlinear vibrational modes), describing in-plane atomic vibrations. In this paper, the stability of two of them is investigated by the molecular dynamics method. It is found that for oscillation amplitudes greater than a certain critical value, the bushes lose their stability, and the critical exponent increases linearly with increasing amplitude above the critical value.

**Keywords:** graphene, bushes of nonlinear modes, molecular dynamics.

## References

- [1] S.V. Dmitriev, E.A. Korznikova, J.A. Baimova, M.G. Velarde // *Physics-Uspekhi* **59** (2016) 446.
- [2] S. V. Dmitriev // *Letters on materials* **1** (2011) 78.
- [3] S. V. Dmitriev, J.A. Baimova // *Technical Physics Letters* **37** (2011) 13.
- [4] P.V. Zakharov, A.M. Eremin, M.D. Starostenkov, A.V. Markidonov, I.S. Lutsenko // *Fundamentalnie Problemi Sovremennogo Materialovedeniya* **12** (2015) 146. (in Russian).
- [5] P.V. Zakharov, M.D. Starostenkov, A.M. Eremin // *Fundamentalnie Problemi Sovremennogo Materialovedeniya* **13** (2016) 223. (in Russian).
- [6] L.I. Manevich, A.V. Savin, V.V. Smirnov, S.N. Volkov // *Physics-Uspekhi* **37** (1994) 859.
- [7] V.V. Kiselev, A.A. Raskovalov // *Fundamentalnie Problemi Sovremennogo Materialovedeniya* **13** (2016) 19. (in Russian).
- [8] G. Chechin, D. Sizintsev, O. Usoltsev // *Letters on materials* **6** (2016) 146.
- [9] G. Chechin, D. Sizintsev, O. Usoltsev // *Letters on materials* **6** (2016) 309.
- [10] G. Chechin, D. Sizintsev, O. Usoltsev // *Computational Material Science* **138** (2017) 353.
- [11] G.M. Chechin, S.A. Shcherbinin // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations* **22** (2015) 244.
- [12] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin // *Physical Review E* **92** (2015) 012907.
- [13] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin // *Letters on Materials* **6** (2016) 9.
- [14] Y. Yamayose, Y. Kinoshita, Y. Doi, A. Nakatani, T. Kitamura // *Europhysics Letters* **80** (2007) 40008.
- [15] E.A. Korznikova, J.A. Baimova, S.V. Dmitriev // *Europhysics Letters* **102** (2013) 60004.
- [16] J.A. Baimova, A.B. Yamilova, I.P. Lobzenko, S.V. Dmitriev, G.M. Chechin // *Fundamentalnie Problemi Sovremennogo Materialovedeniya* **11** (2014) 599. (in Russian).
- [17] E.A. Korznikova, A.V. Savin, J.A. Baimova, S.V. Dmitriev, R.R. Mulukov // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **96** (2012) 222.

- [18] L.Z. Khadeeva, S.V. Dmitriev, Yu.S. Kivshar // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **94** (2011) 539.
- [19] Y. Doi, A. Nakatani // *Procedia Engineering* **10** (2011) 3393.
- [20] Y. Doi, A. Nakatani // *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering* **6** (2012) 71.
- [21] Y. Kinoshita, Y. Yamayose, Y. Doi, A. Nakatani, T. Kitamura // *Physical Review B* **77** (2008) 024307.
- [22] A.V. Savin, Y.S. Kivshar // *Europhysics Letters* **82** (2008) 66002.
- [23] T. Shimada, D. Shirasaki, T. Kitamura // *Physical Review B* **81** (2010) 035401.
- [24] A.V. Savin, Y.S. Kivshar // *Physical Review B* **85**(2008) 125427.
- [25] B. Liu, J.A. Baimova, K. Zhou et al // *Journal of Physics D: Applied Physics* **46** (2013) 305302.
- [26] G.M. Chechin, S.V. Dmitriev, I.P. Lobzenko, D.S. Ryabov // *Physical Review B* **90** (2014) 045432.
- [27] A.V. Savin, L.I. Manevitch // *Physical Review B* **67** (2003) 144302.
- [28] V. P. Sakhnenko, G.M Chechin // *Doklady Physics* **330** (1993) 308.
- [29] V. P. Sakhnenko, G.M Chechin // *Doklady Physics* **338** (1994) 42.
- [30] G.M. Chechin, V.P. Sakhnenko // *Physica D* **117** (1998) 43.
- [31] G. M. Chechin // *Computers & Mathematics with Applications* **17** (1989) 255.
- [32] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin // *Letters on Materials* **6** (2016) 9.
- [33] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin // *Letters on Materials* (2017). (in press).
- [34] A.V. Savin, Yu. S. Kivshar // *Europhysics Letters* **89** (2010) 46001.
- [35] G. M. Chechin, D.S. Ryabov, K.G. Zhukov // *Physica D* **203** (2005) 121.
- [36] G.M. Chechin, A. V. Gnezdilov, M. Yu Zekhtser // *International Journal of Non-Linear Mechanics* **2003** (2015) 1451.
- [37] G.M. Chechin, S.A. Shcherbinin // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations* **22** (2015) 244.
- [38] A.V. Savin, Yu. S. Kivshar // *Physical Review B* **81** (2010) 165418.
- [39] A.V. Savin, Yu. S. Kivshar, B. Hu // *Physical Review B* **82** (2010) 195422.
- [40] E. Barani, E.A. Korznikova, A.P. Chetverikov, K. Zhou, S.V. Dmitriev // *Physical Letters A* **381** (2017) 3553.
- [41] E. Barani, I.P. Lobzenko, E.A. Korznikova, E.G. Soboleva, S.V. Dmitriev, K. Zhou, A.M. Marjaneh // *European Physics Journal B* **90** (2017) 38.
- [42] I.P. Lobzenko, G.M. Chechin, G.S. Bezuglova, Y.A. Baimova, E.A. Korznikova, S.V. Dmitriev // *Physics of the Solid State* **58** (2016) 633.
- [43] G.M. Chechin, S.V. Dmitriev, I.P. Lobzenko, D.S. Ryabov // *Physical Review B* **90** (2014) 045432.