

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛОВ С ГРАДИЕНТНОЙ СТРУКТУРОЙ

В.Д. Сарычев, С.А. Невский*, В.Е. Громов

Сибирский государственный индустриальный университет,

ул. Кирова 42, г. Новокузнецк, 654007, Россия

*e-mail: nevskiy.sergei@yandex.ru

Аннотация. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния материалов с упрочненным слоем, полученным при воздействии концентрированных потоков энергии, с использованием матричных алгоритмов теории упругости при контактном нагружении. Получены зависимости нормальных и касательных напряжений от продольных размеров образца в переходной зоне между упрочненным слоем и матрицей. Показано, что возникающие напряжения являются сжимающими и не превышают предел прочности материалов.

1. Введение

В последнее время предложено большое число методов и способов упрочнения поверхности. Среди их многообразия можно выделить различные способы электровзрывного легирования и нанесения покрытий [1, 2], электронно-пучковую обработку [3, 4] и др. Эти методы приводят к формированию градиентной наноразмерной структуры и соответственно повышению механических свойств. Так в работе [5], показано, что электронно-пучковая обработка приводит к увеличению усталостного ресурса рельсовой стали в 2,5 раза. Причина этого увеличения заключается в формировании игольчатого профиля границы раздела между зоной оплавления и термического влияния, которая приводит к диспергированию концентраторов напряжений, а также в формировании наноразмерного мартенсита. В работе [2] установлено, что нанесение покрытий на различные материалы электровзрывным методом приводит к увеличению их износостойкости и стойкости к электрической эрозии. Исследование влияния электронных пучков на структуру и механические свойства литейных алюминиевых сплавов [6] показало, что они приводят к измельчению пластин кремния и, соответственно, повышению микротвердости поверхностных слоев. Отметим также, что градиентная структура может образовываться в ходе длительной эксплуатации, например рельсов [7, 8]. В работе [9] показано, что воздействие электростатических полей на металл, также приводит к упрочнению поверхности и повышению предела текучести. В [10] показано, что эти поля увеличивают скорость релаксации напряжений.

Таким образом, важным достижением технологии поверхностного упрочнения является создание твердого и износостойкого поверхностного слоя в сочетании с мягкой пластичной матрицей, способной перераспределять внешние напряжения изделий, работающих в тяжело нагруженных условиях и значительно продлевать срок их службы. Однако в некоторых случаях указанная градиентная структура может

приводить к разупрочнению и аварийным ситуациям, требующего отдельного детального изучения. Поэтому возникает необходимость разработки теоретических моделей поведения материала с упрочненным слоем при внешних механических воздействиях, но их создание находится в стадии развития. В этом направлении интенсивно развиваются градиентная теория упругости [11, 12], физическая мезомеханика [13]. Градиентная теория упругости основывается на введении в закон Гука дополнительных членов [12], однако константы, стоящие при них, чаще всего являются подгоночными и не имеют явного физического смысла. Отметим также работы [14–16] по контактными задачам теории упругости неоднородных сред, в которых излагается асимптотические методы решения таких задач, позволяющие получать решения для тонких и толстых относительно мягких слоев. Особенностью этих задач является приближенное удовлетворение условиям равновесия внутри слоя и точное удовлетворение смешанным граничным условиям. Решение таких задач сводится к интегральным уравнениям, требующих развития специфических методов решения, на которые в основном направлено усилия исследователей. При этом расчеты зависимостей полей напряжений в расчетной области носят иллюстративный характер, и нет анализа особенностей их распределений, а основной упор делается на расчетах ширины и глубины зоны контакта и характера распределений контактных напряжений.

В этой связи целью настоящей работы является описание механического поведения материалов с упрочненными слоями в условиях контактного нагружения. Для этого воспользуемся подходом, предложенным в [17] и развитым в работах [18–21]. Согласно этому подходу, связь между граничными величинами напряжений и смещений в слоях осуществляется с помощью матриц перехода.

2. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу о равновесии упругого слоя толщиной $2h$, находящегося в условиях плоской деформации. Пусть нормальное сечение слоя будет полоса, занимающая область $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$. При решении подобных задач может быть использовано интегральное преобразование Фурье по переменной, пробегаящей бесконечный интервал (в данном случае по x). Уравнения движения в перемещениях (уравнения Ламе) имеют вид [16]:

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \Delta v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Запишем выражения для деформации и напряжений: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$.

Обобщенный закон Гука имеет вид:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y]; \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x]; \quad \tau = G\gamma_{xy}. \quad (2)$$

Здесь u и v – перемещения соответственно по осям x и y , G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Будем считать, что на границах полосы $y = \pm h$ заданы усилия, тогда граничные условия принимают вид:

$$\sigma_y(x, h) = \sigma_1(x), \sigma_y(x, -h) = \sigma_2(x), \quad \tau(x, h) = \tau_1(x), \tau(x, -h) = \tau_2(x). \quad (3)$$

3. Система дифференциальных уравнений для образов Фурье и ее общее решение

Применяя к (1) и (2) преобразование Фурье по координате x , получим:

$$(1-2\nu)U'' - 2(1-\nu)\alpha^2 U - i\alpha V' = 0, \quad 2(1-\nu)V'' - (1-2\nu)\alpha^2 V - i\alpha U' = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_y &= \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)V' - i\nu\alpha U], \quad T = G(U' - i\alpha V), \\ \Sigma_x &= \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)(-i\alpha)U' + \nu W], \end{aligned} \quad (5)$$

где $U, V, \Sigma_x, \Sigma_y, T$ – образы Фурье смещений и напряжений соответственно. Будем искать решение системы (3) в виде:

$$\begin{aligned} U(y) &= a_1 ch(\alpha y) + a_2 \alpha y ch(\alpha y) + b_1 sh(\alpha y) + b_2 \alpha y sh(\alpha y), \\ V(y) &= i[(b_1 - (3-4\nu)a_2)ch(\alpha y) + b_2 \alpha y ch(\alpha y) + (a_1 - (3-4\nu)b_2)sh(\alpha y) + a_2 \alpha y sh(\alpha y)], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\chi = 3-4\nu, a_1, a_2, b_1, b_2$ – произвольные постоянные.

Подставляя (6) в (5) получим:

$$\begin{aligned} \Sigma_y / (2G\alpha i) &= a_1 ch(\alpha y) + b_1 sh(\alpha y) + \\ &\quad + a_2(\alpha y ch(\alpha y) - 2(1-\nu)sh(\alpha y)) + b_2(\alpha y sh(\alpha y) - 2(1-\nu)ch(\alpha y)), \\ \Sigma_x / (-2G\alpha i) &= a_1 ch(\alpha y) + b_1 sh(\alpha y) + \\ &\quad + a_2(\alpha y ch(\alpha y) + 2\nu sh(\alpha y)) + b_2(\alpha y sh(\alpha y) + 2\nu ch(\alpha y)), \\ T / (2G\alpha) &= a_1 sh(\alpha y) + b_1 ch(\alpha y) + \\ &\quad + a_2(\alpha y sh(\alpha y) - (1-2\nu)ch(\alpha y)) + b_2(\alpha y ch(\alpha y) - (1-2\nu)sh(\alpha y)). \end{aligned} \quad (7)$$

Используя (7), получим напряжения на границе слоев

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = \Sigma_y(h) &= 2G\alpha i(a_1 ch(z) + b_1 sh(z) + a_2 S_2 + b_2 C_2), \\ \Sigma_2 = \Sigma_y(-h) &= 2G\alpha i(a_1 ch(z) - b_1 sh(z) - a_2 S_2 + b_2 C_2), \\ T_1 = T(h) &= 2G\alpha(a_1 sh(z) + b_1 ch(z) + a_2 C_1 + b_2 S_1), \\ T_2 = T(-h) &= 2G\alpha(-a_1 sh(z) + b_1 sh(z) + a_2 C_1 - b_2 S_1), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= z sh(z) - (1-2\nu)ch(z), \quad S_1 = z ch(z) - (1-2\nu)sh(z), \\ C_2 &= z sh(z) - 2(1-\nu)ch(z), \quad S_2 = z ch(z) - 2(1-\nu)sh(z), \quad z = \alpha h. \end{aligned} \quad (9)$$

Выразим постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 через $\Sigma_1, \Sigma_2, T_1, T_2$, используя систему (8). Для этого складываем первое из уравнений (8) со вторым и вычитаем из третьего уравнения четвертое. Получаем систему для определения a_1 и a_2

$$a_1 ch(z) + b_2 C_2 = \Sigma_+ = a_1 sh(z) + b_2 S_1 = T_-, \quad (10)$$

где $\Sigma_+ = (\Sigma_1 + \Sigma_2) / (4i\alpha G), T_- = (T_1 - T_2) / (4\alpha G)$.

Решение системы (10) можно представить в виде

$$a_1 = \frac{1}{2i\alpha G} \cdot \frac{1}{D_+} ((\Sigma_1 + \Sigma_2)S_1 - i(T_1 - T_2)C_2),$$

$$b_2 = \frac{1}{2i\alpha G} \cdot \frac{1}{D_+} (-(\Sigma_1 + \Sigma_2)sh(z) + i(T_1 - T_2)ch(z)), \quad D_+ = 2z + sh(2z). \quad (11)$$

Теперь получим систему для определения a_2, b_1 .

$$a_2 S_2 + b_1 sh(z) = \sum_- a_2 C_1 + b_1 ch(z) = T_+. \quad (12)$$

Решение системы (12) представим в виде:

$$a_2 = \frac{1}{2i\alpha G} \cdot \frac{1}{D_-} ((\Sigma_1 - \Sigma_2)ch(z) + i(T_1 + T_2)sh(z)),$$

$$b_1 = \frac{1}{2i\alpha G} \cdot \frac{1}{D_-} ((\Sigma_1 - \Sigma_2)C_1 - i(T_1 + T_2)S_2), \quad D_- = -2z + sh(2z). \quad (13)$$

Найденные значения a_1, a_2, b_1, b_2 подставим в формулы (6) и выразим U_1, U_2, V_1, V_2 через $\Sigma_1, \Sigma_2, T_1, T_2$.

$$U_1 = U_{11}\Sigma_1 + U_{12}\Sigma_2 + U_{13}T_1 + U_{14}T_2, \quad U_2 = U_{21}\Sigma_1 + U_{22}\Sigma_2 + U_{23}T_1 + U_{24}T_2,$$

$$V_1 = V_{11}\Sigma_1 + V_{12}\Sigma_2 + V_{13}T_1 + V_{14}T_2, \quad V_2 = V_{21}\Sigma_1 + V_{22}\Sigma_2 + V_{23}T_1 + V_{24}T_2. \quad (14)$$

где

$$U_{11} = \frac{4z(1-\nu)sh(2z)}{2i\alpha G\Delta}, \quad U_{12} = -\frac{4z^2 + (1-2\nu)sh^2(2z)}{2i\alpha G\Delta}, \quad U_{13} = \frac{(1-\nu)(sh(4z) - 4z)}{2\alpha G\Delta},$$

$$U_{14} = \frac{2(1-\nu)(2zch(2z) - sh(2z))}{2\alpha G\Delta}, \quad U_{21} = \frac{4z(1-\nu)sh(2z)}{2i\alpha G\Delta}, \quad U_{22} = \frac{4z^2 + (1-2\nu)sh^2(2z)}{2i\alpha G\Delta},$$

$$U_{23} = \frac{2(1-\nu)(2zch(2z) - sh(2z))}{2\alpha G\Delta}, \quad U_{24} = \frac{(1-\nu)(sh(4z) - 4z)}{2\alpha G\Delta}, \quad V_{11} = \frac{(1-\nu)(4z + sh(4z))}{2\alpha G\Delta},$$

$$V_{12} = -\frac{2(1-\nu)(sh(2z) + 2zch(2z))}{2\alpha G\Delta}, \quad V_{13} = \frac{((1-2\nu)sh^2(2z) + 4z^2)}{2i\alpha G\Delta}, \quad V_{14} = \frac{4(1-\nu)zsh(2z)}{2i\alpha G\Delta},$$

$$V_{21} = -\frac{2(1-\nu)(sh(2z) + 2zch(2z))}{2\alpha G\Delta}, \quad V_{22} = -\frac{(1-\nu)(4z + sh(4z))}{2\alpha G\Delta}, \quad V_{23} = \frac{4(1-\nu)zsh(2z)}{2i\alpha G\Delta},$$

$$V_{24} = \frac{((1-2\nu)sh^2(2z) + 4z^2)}{2i\alpha G\Delta}.$$

Полученные коэффициенты используются ниже для определения матрицы перехода.

4. Получение матрицы перехода между слоями

Для получения матрицы перехода между слоями необходимо получить связь между смещениями и напряжениями n -ого слоя с аналогичными величинами $n+1$ -ого слоя. Используем обозначения рис. 1 для n -ого слоя. С учетом (14), и учитывая, что ширина n -ого слоя равна h_n , можно записать:

$$\begin{aligned}
U_n &= u_{n1}\Sigma_n + u_{n2}\Sigma_{n+1} + u_{n3}T_n + u_{n4}T_{n+1}, & U_{n+1} &= u_{n2}\Sigma_n + u_{n1}\Sigma_{n+1} - u_{n4}T_n - u_{n3}T_{n+1}, \\
V_n &= v_{n1}\Sigma_n + v_{n2}\Sigma_{n+1} + v_{n3}T_n + v_{n4}T_{n+1}, & V_{n+1} &= -v_{n2}\Sigma_n - v_{n1}\Sigma_{n+1} + v_{n4}T_n + v_{n3}T_{n+1},
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$U_n = U(\alpha, h_n), V_n = V(\alpha, h_n), U_{n+1} = U(\alpha, 0), V_{n+1} = V(\alpha, 0);$$

$$\Sigma_n = \Sigma(\alpha, h_n), T_n = T(\alpha, h_n), \Sigma_{n+1} = \Sigma(\alpha, 0), T_{n+1} = T(\alpha, 0);$$

$$u_{n1} = \frac{i}{2G_n\Delta_n\alpha} (z_n^2 + (1-2v_n) \cdot \text{sh}^2 z_n), \quad u_{n2} = \frac{i(1-v_n)}{G_n\Delta_n\alpha} z_n \cdot \text{sh}(z_n),$$

$$u_{n3} = -\frac{(1-v_n)}{2G_n\Delta_n\alpha} (2z_n^2 - \text{sh}(2z_n)), \quad u_{n4} = \frac{(1-v_n)}{G_n\Delta_n\alpha} (z_n \text{ch}(z_n) - \text{sh}(z_n)),$$

$$v_{n1} = \frac{(1-v_n)}{2G_n\Delta_n\alpha} (2z_n^2 + \text{sh}(2z_n)), \quad v_{n2} = -\frac{(1-v_n)}{G_n\Delta_n\alpha} (z_n \text{ch}(z_n) + \text{sh}(z_n)),$$

$$v_{n3} = -u_{n1}, \quad v_{n4} = u_{n2}, \quad \Delta_n = \text{sh}^2(z_n) - z_n^2, \quad z_n = \alpha h_n. \tag{16}$$

Систему уравнений (15) можно переписать так, что величины с индексом n будут перенесены в левую часть, а величины с индексом $n+1$ перенесены в правую часть.

$$U_n - u_{n1}\Sigma_n - u_{n3}T_n = u_{n2}\Sigma_{n+1} + u_{n4}T_{n+1},$$

$$-u_{n2}\Sigma_n + u_{n4}T_n = -U_{n+1} + u_{n1}\Sigma_{n+1} - u_{n3}T_{n+1},$$

$$V_n - v_{n1}\Sigma_n - v_{n3}T_n = v_{n2}\Sigma_{n+1} + v_{n4}T_{n+1},$$

$$v_{n2}\Sigma_n - v_{n4}T_n = -V_{n+1} - v_{n1}\Sigma_{n+1} + v_{n3}T_{n+1}. \tag{17}$$

Тогда в матричной форме соотношения (17) будут иметь вид:

$$M_{n,n}f_n = M_{n,n+1}f_{n+1}, \tag{18}$$

где

$$f_n = \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \\ \Sigma_n \\ T_n \end{bmatrix}, \quad M_{n,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -u_{n1} & -u_{n3} \\ 0 & 0 & -u_{n2} & u_{n4} \\ 0 & 1 & -v_{n1} & -v_{n3} \\ 0 & 0 & v_{n2} & -v_{n4} \end{bmatrix}, \quad f_{n+1} = \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ \Sigma_{n+1} \\ T_{n+1} \end{bmatrix}, \quad M_{n,n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & u_{n2} & u_{n4} \\ -1 & 0 & u_{n1} & -u_{n3} \\ 0 & 0 & v_{n2} & v_{n4} \\ 0 & -1 & -v_{n1} & v_{n3} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Далее, обращая матрицу $M_{n,n}$, получаем связь:

$$f_n = G_n \cdot f_{n+1}. \tag{20}$$

Элементы матрицы G_n представлены таблице 1. Здесь индекс n опущен. Для нескольких слоев можно последовательно использовать (20) и тем самым связать параметры первого и последнего слоев.

Таблица 1. Коэффициенты матрицы перехода.

$\operatorname{ch}(z) + \frac{z \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)}$	$i \left(\operatorname{sh}(z) + \frac{(z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z))}{2(1-\nu)} \right)$	$\frac{iz \operatorname{sh}(z)}{4G\alpha(1-\nu)}$	$\frac{\operatorname{sh}(z)}{G\alpha} + \frac{z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z)}{4G\alpha(1-\nu)}$
$i \left(\operatorname{sh}(z) + \frac{(z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z))}{2(1-\nu)} \right)$	$\operatorname{ch}(z) - \frac{z \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)}$	$\frac{\operatorname{sh}(z)}{G\alpha} - \frac{z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z)}{4G\alpha(1-\nu)}$	$\frac{iz \operatorname{sh}(z)}{4G\alpha(1-\nu)}$
$\frac{iG\alpha z \cdot \operatorname{sh}(z)}{1-\nu}$	$-\frac{G\alpha}{(1-\nu)}(z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z))$	$\operatorname{ch}(z) - \frac{z \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)}$	$\frac{i(z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z))}{2(1-\nu)} + i \operatorname{sh}(z)$
$\frac{G\alpha}{(1-\nu)}(z \operatorname{ch}(z) + \operatorname{sh}(z))$	$\frac{iG\alpha z \cdot \operatorname{sh}(z)}{1-\nu}$	$\frac{i(z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z))}{2(1-\nu)} - i \operatorname{sh}(z)$	$\operatorname{ch}(z) + \frac{z \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)}$

5. Расчет напряженно-деформированного состояния при контактном нагружении

Применим аппарат матриц перехода к решению задачи распределения напряжений в материале на границе упрочненный слой / подложка. Считаем, что величина прогиба зависит от действующей нагрузки, то есть реализуются условия Винклера [20, 21]. В этом случае смещения V при $y=0$ пропорциональны σ_y

$$V(0, x) = k_\nu \sigma_y(0, x), \quad (21)$$

где k – константа Винклера. При реализации этих условий, как правило, касательные напряжения отсутствуют, т.е. $\sigma_{xy}(0, x) = 0$. В предлагаемой модели полагаем, что имеются три слоя (рис. 1).

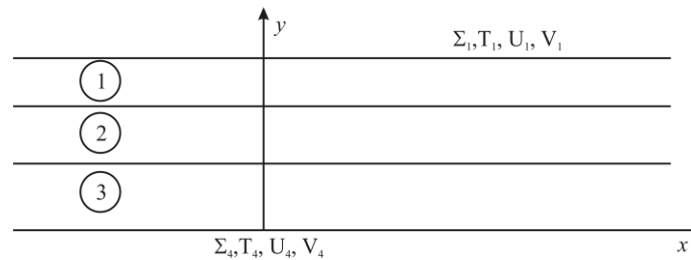


Рис. 1. К постановке задачи о взаимодействии слоев.

Первый – упрочненный, второй – мягкий подслои и третий – сама матрица. Тогда $f_4 = (U_4; k_\nu \Sigma_4; \Sigma_4; 0)$ и на границе $y = h$ ($h = h_1 + h_2 + h_3$). Будем задавать напряжения

от нагрузки $\sigma_{xy}(h, x) = 0$, $\sigma_y(h, x) = \sigma(x)$. Тогда $T_1 = 0$; $\Sigma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) \exp(ikx) dx$, а значит

$f_1 = (U_1, V_1, \Sigma_1, 0)$. Последовательно используя формулу (20), можно определить связь между f_1 и f_4 :

$$f_1 = G_1 G_2 G_3 \cdot f_4. \quad (22)$$

Система (22) является системой четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Разрешив ее, получим f_4 , а затем последовательно по формуле (22) f_3 , f_2 . Указанный алгоритм при численных значениях параметров слоев может быть легко реализован на ЭВМ. Однако указанная процедура громоздка для того, чтобы прояснить какой-либо физический смысл. Поэтому для простоты рассуждений и в качестве иллюстрации рассмотрим двухслойную задачу на винклеровом основании при условии, что $h_2 \rightarrow \infty$. Необходимо отметить, что прямой предельный переход в матрице \hat{G}_2 при $h_2 \rightarrow \infty$ невозможен. Для реализации указанного подхода записываем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
U_2 &= g_{11}U_3 + (g_{12}k_v + g_{13})\Sigma_3, \\
V_2 &= g_{21}U_3 + (g_{22}k_v + g_{23})\Sigma_3, \\
\Sigma_2 &= g_{31}U_3 + (g_{32}k_v + g_{33})\Sigma_3, \\
T_2 &= g_{41}U_3 + (g_{42}k_v + g_{43})\Sigma_3.
\end{aligned} \tag{23}$$

Из последних двух уравнений выражаем U_3 и Σ_3 через Σ_2 и T_2 и подставляем в первое и второе уравнения системы. Получим соотношения

$$U_2 = u_{23}\Sigma_2 + u_{24}T_2, \quad V_2 = v_{23}\Sigma_2 + v_{24}T_2. \tag{24}$$

Далее воспользуемся вторым и четвертым уравнениями системы (23) и получим:

$$\begin{aligned}
U_2 &= u_{12}\Sigma_1 + u_{11}\Sigma_2 - u_{14}T_1 - u_{13}T_2, \\
V_2 &= -v_{12}\Sigma_1 - v_{11}\Sigma_2 + v_{14}T_1 + v_{13}T_2.
\end{aligned} \tag{25}$$

Из системы (24) и (25) исключаем U_2 , V_2 и окончательно для Σ_2 и T_2 имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
(u_{23} - u_{11})\Sigma_2 + (u_{24} - u_{13})T_2 &= u_{12}\Sigma_1 - u_{14}T_1, \\
(v_{23} + v_{11})\Sigma_2 + (v_{24} - v_{13})T_2 &= -v_{12}\Sigma_1 + v_{14}T_1.
\end{aligned} \tag{26}$$

Наиболее громоздким в описанном алгоритме является представление Σ_2 и T_2 через входные параметры в силу того, что в коэффициентах u_{2j} и v_{2j} ($j=2,3$) необходим предельный переход при $h_2 \rightarrow \infty$, но предварительно их надо выписать при конечном h_2 . Действительно, для коэффициентов в (24) имеем:

$$\begin{aligned}
u_{23} &= (k_v(g_{11}g_{42} - g_{41}g_{12}) + (g_{11}g_{43} - g_{41}g_{13}))/\Delta, \\
u_{24} &= (k_v(g_{12}g_{31} - g_{11}g_{32}) + (g_{13}g_{31} - g_{11}g_{33}))/\Delta, \\
v_{23} &= (k_v(g_{31}g_{22} - g_{21}g_{32}) + (g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}))/\Delta, \\
v_{24} &= (k_v(g_{31}g_{42} - g_{41}g_{32}) + (g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}))/\Delta,
\end{aligned} \tag{27}$$

где $\Delta = k_v(g_{31}g_{42} - g_{41}g_{32}) + (g_{31}g_{43} - g_{41}g_{33})$, здесь через g_{ij} представлены коэффициенты матрицы G_2 . Подставим их в (27) и получаем

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{Gk}{2(1-v)}(k_0(z^2 - sh^2z) - (2z + sh2z)) \\
u_{23} &= \frac{i}{2(1-v)}(2z - (1-2v)sh2z - k_0(z^2 + (1-2v)sh^2z))/\Delta \\
u_{24} &= (k_0(2z - sh2z) - ch^2z)/\Delta \\
v_{24} &= \frac{i}{2(1-v)}((z + (1-v)^2sh2z)/(1-v) + k_0(z^2 + (1-2v)sh^2z))/\Delta
\end{aligned} \tag{28}$$

где $k_0 = (2kGk_v)/(1-v)$.

Переходя в формулах (28) к пределу $z \rightarrow \infty$, получаем ситуацию в точности такую же, как слой конечной толщины на полубесконечном основании, для которой постановка и

получение формул в общем виде были изложены в [16], однако, анализа напряженного состояния границы раздела не было проведено. Уделим этому особое внимание. Считаем, что нагрузка распределена так, как показано на рис. 2.

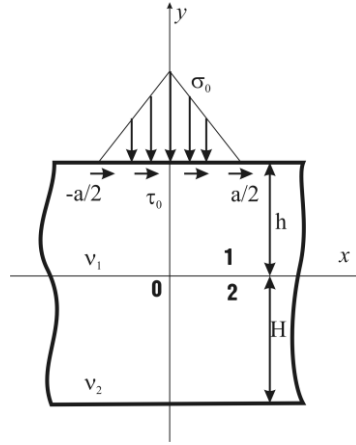


Рис. 2. К постановке задачи об определении напряжений в зоне сопряжения слоев.

Тогда образ Фурье нормального напряжения вдоль контакта упругих слоёв, один из которых имеет конечную толщину и нагружен сосредоточенной сжимающей силой, а второй бесконечен, имеет вид:

$$F = -\frac{(a_0 z + b_0)shz + (b_0 z + 2)chz}{(q_0 - 2c_0) \cdot sh^2 z - c_0 z^2 - b_0 sh2z - 2}, \quad (29)$$

где $a_0 = (1 + (1 - 2\nu_2)B)/(1 - \nu_1)$, $b_0 = 2 \frac{1 - \nu_2}{1 - \nu_1} B \frac{|z|}{z}$, $c_0 = (a_0^2 - b_0^2)/2$, $B = \frac{G_1}{G_2}$, $z = \alpha h$, α – параметр Фурье, h -толщина слоя.

В случае, показанном на рисунке (2):

$$G(z, a_0, b_0, \bar{c}, h) = F(a_0, b_0, z) \cdot \frac{\sin^2(z\bar{c}/2)}{z^2} \cdot 4\sigma_m \cdot h^2, \quad (30)$$

где $\bar{c} = c/h$ - относительная ширина распределения, σ_{\max} - максимум давления. Используя (30) и выражение для точечной нагрузки, получим окончательные формулы для расчета нормальных и касательных напряжений в зоне контакта слоев:

$$\sigma_y(\bar{x}, a, b, c) = \int_0^{\infty} \Sigma(z, a, b, c) \cos(z \cdot \bar{x}) dz; \quad \tau(\bar{x}, a, b, c) = \int_0^{\infty} T(z, a, b, c) \sin(z \cdot \bar{x}) dz;$$

$$\Sigma(z, a, b, c) = 4 \cdot \sin^2(zc/2) \cdot ((az + b)shz + (bz + 2)chz) / (D \cdot z^2 \cdot c^2);$$

$$T(z, a, b, c) = 4 \cdot \sin^2(zc/2) \cdot ((bz + a - 2)shz + azchz) / (D \cdot z^2 \cdot c^2);$$

$$D = (a^2 - b^2) \cdot (sh^2 z - z^2) / 2 - 2ash^2 z - bsh2z - 2;$$

$$a = (1 + (1 - 2\nu_2)B) / (1 - \nu_1); \quad b = 2(1 - \nu_2)B / (1 - \nu_1); \quad B = G_1 / G_2; \quad c = c_0 / h; \quad \bar{x} = x/h;$$

$$\sigma_y = \bar{\sigma}_y \cdot \sigma_{\max}; \quad \tau = \bar{\tau} \cdot \sigma_{\max}; \quad \sigma_{\max} = P / (\pi^2 h \cdot b_0), \quad (31)$$

где G_1 , G_2 -модули сдвига; ν_1 , ν_2 - коэффициенты Пуассона поверхностного слоя и основного материала, h -толщина упрочненного слоя. Результаты расчетов

представлены на рисунках 3 и 4, а экстремальные значения нормальных и касательных напряжений в таблице 2.

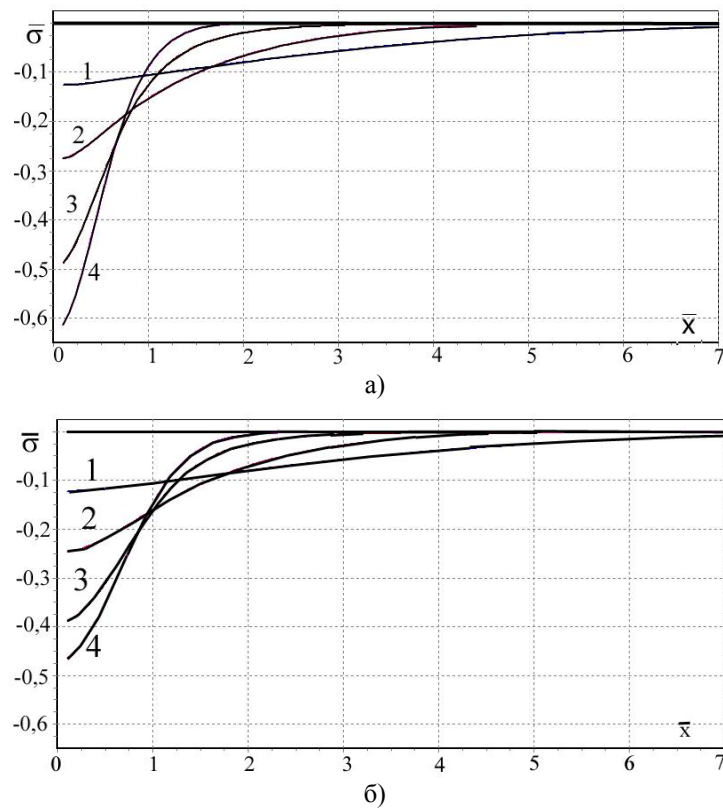


Рис. 3. Распределение безразмерных нормальных напряжений вдоль линии раздела сред в зависимости от безразмерной продольной координаты.

а) соответствует относительной ширине нагрузки $c=a/h=0.1$, б) $c=1$.

Цифры относятся: 1- $B=100$, 2- $B=10$, 3- $B=1$, 4- $B=0.01$.

Из представленных данных следует, что наибольшие по модулю нормальные напряжения достигают на оси симметрии и по мере уменьшения жесткости слоя, т.е. уменьшения B , увеличиваются для всех значений c . Более жесткие слои не приводят к резким пикам напряжений (кривые 1, 2 на рис. 3) и нагрузка распределяется по большей площади и меньшим значением в центре. В этом случае проявляется благоприятная роль более жесткого поверхностного слоя как распределителя нормальных сжимающих напряжений, уменьшающих их максимум. Анализ касательных напряжений (рисунок 4) показывает, что при всех параметрах ширины нагрузки имеет место максимум модуля касательного напряжения. При $c = 0.1$, 1 этот максимум достигает наибольшего значения для $B=1$ (рис. 4., табл. 2) При дальнейшем увеличении параметра c он перестает быть ярко выраженным и меняет свое положение относительно кривых, соответствующих другим параметрам B . Таким образом при малых c в однородных пластинах наблюдается эффект аналогичный эффекту выдавливания пробки, который наблюдается при пробивании жестких преград средней толщины. Возникновение этого эффекта обусловлено наличием острых пиков касательных напряжений. При дальнейшем увеличении параметра c пик становится пологим, эффект пробки исчезает, а значение максимума принимает промежуточное положение между $B > 1$ и $B < 1$. В отличие от распределения нормальных напряжений, касательные напряжения ведут себя сложным образом в зависимости от параметров c и B , тем самым меняя свою ведущую роль в напряженном состоянии. Следовательно,

можно сделать вывод, что при малой ширине нагрузки в материале выгодно создавать градиентную структуру с жестким верхним слоем, при этом однородный слой может оказаться неблагоприятным.

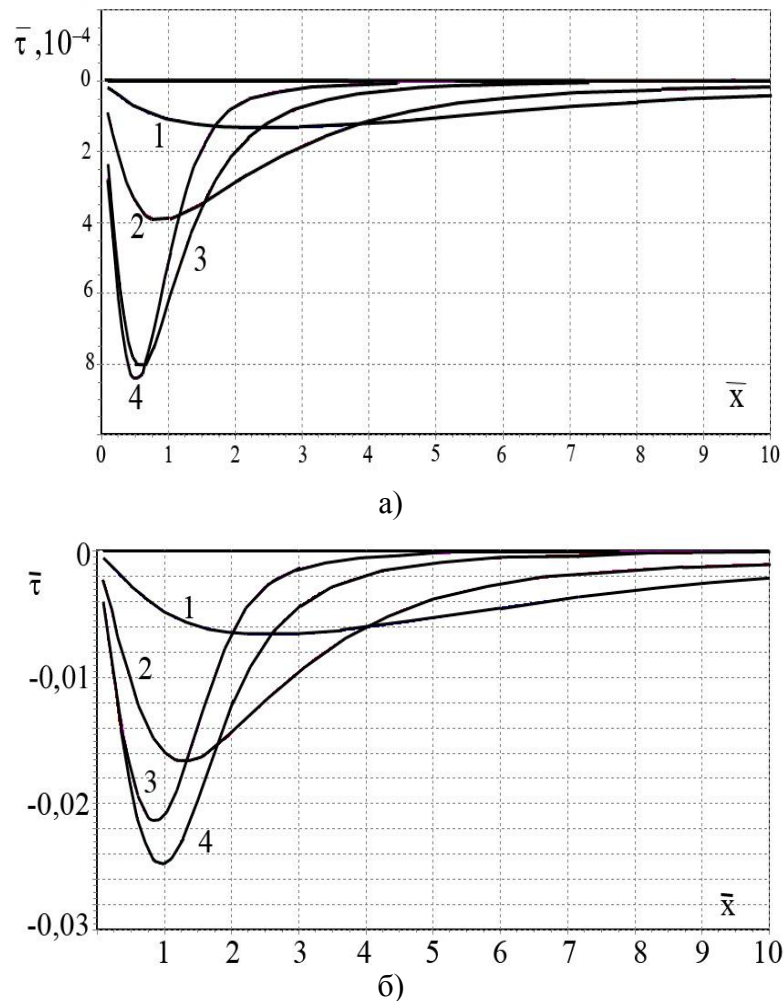


Рис. 4. Распределение безразмерных нормальных напряжений вдоль линии раздела сред в зависимости от безразмерной продольной координаты.
 а) соответствует относительной ширине нагрузки $c=a/h=0.1$, б) $c=1$.
 Цифры относятся: 1- $B=100$, 2- $B=10$, 3- $B=1$, 4- $B=0.01$.

Таблица 2. Экстремальные значения напряжений в зоне сопряжения слоев.

B	Нормальное напряжение				Касательное напряжение			
	100	10	1	0.01	100	10	1	0.01
c								
0.1	-0.127	-0.276	-0.489	-0.614	-0.0007	-0.0002	-0.0004	-0.00042
1	-0.122	-0.246	-0.390	-0.460	-0.0067	-0.0165	-0.0248	-0.0214
2	-0.114	-0.203	-0.276	-0.307	-0.025	-0.0490	-0.052	-0.0369
5	-0.090	-0.123	-0.137	-0.143	-0.112	-0.130	-0.0882	-0.051
7	-0.077	-0.095	-0.102	-0.105	-0.169	-0.168	-0.0984	-0.0535
10	-0.061	-0.069	-0.073	-0.075	-0.249	-0.214	-0.107	-0.051

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания № 3.1496.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы и грантов РФФИ № 14-08-00506-а, № 15-08-03411-а и № 14-32-50295 мол_нр.

Литература

- [1] A.Yu. Granovskii, V.D. Sarychev, V.E. Gromov // *Technical Physics*. **58** (2013) 1544.
- [2] E.A. Budovskikh, V.E. Gromov, D.A. Romanov // *Doklady Physics* **58** (2013) 82.
- [3] Ю.Ф. Иванов, В.Е. Громов, В.А. Гришунин, А.Д. Тересов, С.В. Коновалов // *Физическая мезомеханика* **16(2)** (2013) 47-52.
- [4] V.V. Uglov, N.N. Koval', Yu.F. Ivanov, Yu.A. Petukhov, A.V. Kalin, A.D. Teresov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. **7(2)** (2013) 248.
- [5] V.A. Grishunin, V.E. Gromov, Yu.F. Ivanov, A.D. Teresov, S.V. Konovalov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7(5)** (2013) 990.
- [6] Н.Н. Черенда, Ю.Ф. Иванов, Н.В. Бибик, В.В. Углов, Е.А. Петрикова, В.М. Асташинский, А.М. Кузьмицкий // *Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия* **4** (2013) 50.
- [7] W. Lojkowski, Y. Millman, S.I. Chugunova, I.V. Goncharova, M. Djahanbakhsh, G. Burkle, H.-J. Fecht // *Materials Science and Engineering A* **303** (2001) 209.
- [8] S. Mohammadzadeh, M. Sharavi, H. Keshavarzian // *Engineering Failure Analysis* **29** (2013) 132.
- [9] О.А. Троицкий, Ю.В. Баранов, Ю.С. Авраамов, А.Д. Шляпин, *Физические основы и технологии обработки современных материалов (теория, технология, структура и свойства). Т.1* (Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2004).
- [10] S.A. Nevskii., S.V. Konovalov, V.E. Gromov // *Technical Physics* **56** (2011) 877.
- [11] Samuel Forest, Elias C. Aifantis. // *International Journal of Solids and Structures*. **47** (2010) 3367.
- [12] N.H. Zhang, W.L. Meng, E.C. Aifantis // *Composite Structures* **93** (2011) 3130.
- [13] V.E. Panin, D.D. Moiseenko, S.V. Panin, P.V. Maksimov, I.G. Goryacheva, C.H. Cheng // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **55(2)** (2014) 318.
- [14] В.М. Александров, Д.А. Пожарский, *Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел* (Факториал, М, 1998).
- [15] В.М. Александров, М.И. Чебаков, *Аналитические методы в контактных задачах теории упругости* (Физматлит, М, 2004).
- [16] В.М. Александров, С.М. Мхитарян, *Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками* (Наука, М, 1987).
- [17] Ю.А. Шевляков, *Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред*. (Вища школа, Киев, Одесса, 1977).
- [18] Л.А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах* (Наука, М, 1984).
- [19] В.Д.Сарычев, В.А Бердышев, В.И. Петров // *Изв. вузов. Черная металлургия* **4** (1998) 17.
- [20] A.M. Zenkour, M. Sobhy // *Physica E* **53** (2013) 251.
- [21] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, J.N. Reddy // *Composites: Part B* **57** (2014) 269.

THE THEORETICAL ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF MATERIALS WITH GRADIENT STRUCTURE

V.D. Sarychev, S.A. Nevskii*, V.E. Gromov

Siberian State Industrial University,
Kirov st. 42, Novokuznetsk, 654007, Russia
*e-mail: nevskiy.sergei@yandex.ru

Abstract. The analysis of the stress-strain state of a material with a hardened layer obtained when exposed to concentrated energy fluxes, using matrix algorithms of the theory of elasticity by contact loading is implemented. The dependences of the normal and tangential stresses from the longitudinal dimensions of the sample in the transition zone between the hardened layer and the matrix are found. It is shown that the resulting stresses are compressive and do not exceed the tensile strength of materials.

Acknowledgements

This work was financially supported by the state task № 3.1496.2014 / K for the science research and by RFBR grants № 14-08-00506-a, № 15-08-03411-a, and № 14-32-50295 young_scientists.

References

- [1] A.Yu. Granovskii, V.D. Sarychev, V.E. Gromov // *Technical Physics* **58** (2013) 1544.
- [2] E.A. Budovskikh, V.E. Gromov, D.A. Romanov // *Doklady Physics* **58** (2013) 82.
- [3] Yu.F. Ivanov, V.E. Gromov, V.A. Grishunin, A.D. Teresov, S.V. Konovalov // *Physical Mesomechanics* **16(2)** (2013) 47.
- [4] V.V. Uglov, N.N. Koval', Yu.F. Ivanov, Yu.A. Petukhov, A.V. Kalin, A.D. Teresov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7(2)** (2013) 248.
- [5] V.A. Grishunin, V.E. Gromov, Yu.F. Ivanov, A.D. Teresov, S.V. Konovalov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7(5)** (2013) 990.
- [6] N.N. Cherenda., Yu.F. Ivanov, N.V. Bibik, V.V. Uglov, E.A. Petrikova, V.M. Astashinskii, A.M. Kuzmitskii // *Bulletin of University. Powder metallurgy and functional coatings* **4** (2013) 50.
- [7] W. Lojkowski, Y. Millman, S.I. Chugunova, I.V. Goncharova, M. Djahanbakhsh, G. Burkle, H.-J. Fecht // *Materials Science and Engineering A* **303** (2001) 209.
- [8] S. Mohammadzadeh, M. Sharavi, H. Keshavarzian // *Engineering Failure Analysis* **29** (2013) 132.
- [9] O.A. Troitsky, Yu.V. Baranov, Yu.S. Avraamov, A.D. Shlyapin. *Physical principles and technology of processing of advanced materials (theory, technology, structure and properties)*. V. 1 (Institute of Computer Science Investigation, Izhevsk, 2004).
- [10] S.A. Nevskii, S.V. Konovalov, V.E. Gromov // *Technical Physics* **56** (2011) 877.
- [11] Samuel Forest, Elias C. Aifantis // *International Journal of Solids and Structures* **47** (2010) 3367.
- [12] N.H. Zhang, W.L. Meng, E.C. Aifantis // *Composite Structures* **93** (2011) 3130.
- [13] V.E. Panin, D.D. Moiseenko, S.V. Panin, P.V. Maksimov, I.G. Goryacheva, C.H. Cheng. // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **55(2)** (2014) 318.
- [14] V.M. Alexandrov, D.A. Pozharskii, *Non-classical three-dimensional problems of contact mechanics of elastic states* (Factorial, M, 1998).

- [15] V.M. Alexandrov, M.I. Chebakov, *Analytical methods for contact problems of elasticity theory* (Fizmatlit, M, 2004).
- [16] V.M. Alexandrov, S.M. Mkhitarian, *Contact problems with thin coatings and layers* (Nauka, M, 1987).
- [17] Yu.A. Shevlyakov, *Matrix algorithms in the theory of elasticity of inhomogeneous media* (Visha Scola, Kiev, Odessa, 1977).
- [18] L.A. Molotkov *Matrix method in the theory of wave propagation in layered elastic and liquid media* (Nauka, M, 1984).
- [19] V.D. Sarychev, V.A. Berdyshev, V.I. Petrov // *Bulletin of University. Ferrous Metallurgy* **4** (1998) 17.
- [20] A.M. Zenkour, M. Sobhy // *Physica E* **53** (2013) 251
- [21] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, J.N. Reddy // *Composites: Part B.* **57** (2014) 269.