

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО СЛОЖНЫМ ПЛОСКИМ ТРАЕКТОРИЯМ

В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев*, Е.Г. Алексеева

Тверской государственный технический университет,
наб. Афанасия Никитина, 22, Тверь, 170026, Россия

*e-mail: alexeew@bk.ru

Аннотация. Представлены основные уравнения и соотношения теории процессов упругопластического деформирования в плоских задачах для произвольных траекторий, учитывающих обобщенный эффект Баушингера при сложном нагружении-разгружении и вторичное пластическое деформирование. Для численного решения основных уравнений с использованием универсальных аппроксимаций функционалов процессов применен метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Для оценки достоверности полученных численных результатов проведены экспериментальные исследования на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ.

1. Основные соотношения, уравнения и математические модели

В теории процессов упругопластического деформирования компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} представлены в виде [1, 2]

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + S_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + \mathcal{E}_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

где $S_{ij} = \sigma S_{ij}^*$, $\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E} \mathcal{E}_{ij}^*$ – компоненты их тензоров-девиаторов; S_{ij}^* , \mathcal{E}_{ij}^* – компоненты направляющих тензоров;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}} \quad (2)$$

– модули их шаровых тензоров и тензоров-девиаторов соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера. При простом пропорциональном нагружении направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают, то есть $(S_{ij}^*) = (\mathcal{E}_{ij}^*)$ и соотношения теории малых упругопластических деформаций (ТМУПД) при простом нагружении имеют вид [1, 3]

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \mathcal{E}_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где

$$\sigma = \Phi(\mathcal{E}) \quad (4)$$

– универсальная функция единой диаграммы упрочнения материалов при любом сложном напряженно-деформированном состоянии (НДС) Роша и Эйхингера,

определенная скалярные свойства материалов; K – упругий модуль объемной деформации; $\sigma/\mathcal{E} = 2G_p$ – удвоенный пластический модуль сдвига. При сложном нагружении направляющие тензоры не совпадают, то есть $(S_{ij}^*) \neq (\mathcal{E}_{ij}^*)$. Значит учет в определяющих соотношениях (3), (4) только скалярных свойств материалов недостаточен. Поэтому тензорное изложение теории пластического деформирования материалов не позволяет геометрически наглядно отобразить векторные свойства материалов в трехмерном физическом пространстве [1–7]. В связи с этим в теории процессов в работах А. А. Ильюшина [1–4] было использовано их представление в линейном совмешенном евклидовом пространстве E_6 напряжений и деформаций с ортонормированным неподвижным базисом $\{\hat{i}_k\}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, 5$. В этом пространстве E_6 тензорам напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} поставлены в соответствие векторы напряжений и деформаций

$$\bar{S} = \bar{S}_0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\mathcal{E}}_0 + \bar{\mathcal{E}}, \quad (5)$$

где $\bar{S}_0 = S_0 \hat{i}_0$, $\bar{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 \hat{i}_0$ – векторы всестороннего объемного нагружения и расширения;

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5) \quad (6)$$

– векторы напряжений и деформаций в пятимерном совмешенном девиаторном подпространстве E_5 . Координаты векторов S_k, \mathcal{E}_k связаны с компонентами тензоров и тензоров-девиаторов взаимно однозначными преобразованиями А.А. Ильюшина [1, 5]

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, \quad S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{22} - S_{33}), \quad S_3 = \sqrt{2}S_{12}, \quad S_4 = \sqrt{2}S_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \mathcal{E}_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, \quad \mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathcal{E}_{11}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_{22} - \mathcal{E}_{33}), \quad \mathcal{E}_3 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{12}, \quad \mathcal{E}_4 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{23}, \quad \mathcal{E}_5 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{13}. \end{cases} \quad (7)$$

В подпространстве E_5 конец вектора деформаций $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\hat{\mathcal{E}}$, где $\hat{\mathcal{E}}$ – единичный вектор, описывает траекторию деформирования с длиной дуги s , в каждой точке которой строится естественный ортонормированный обобщенный репер Френе-Ильюшина $\{\hat{p}_k\}$, где $k = 1, 2, \dots, 5$, а также векторы напряжений $\bar{\sigma} = \sigma\hat{\sigma}$, $d\bar{\sigma}/ds$, где $\hat{\sigma}$ – единичный вектор. Совокупность векторов $\bar{\mathcal{E}}(s)$, $\bar{\sigma}(s)$, $d\bar{\sigma}/ds$, вместе с температурой $T(s)$ и средней деформацией ε_0 в этой точке, образуют *геометрический образ физического процесса* в девиаторном подпространстве E_5 .

Единичные векторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\mathcal{E}}$ в E_5 эквивалентны направляющим тензорам напряжений (S_{ij}^*) и деформаций (\mathcal{E}_{ij}^*) соответственно. Поэтому в случае простого нагружения $\hat{\sigma} = \hat{\mathcal{E}}$ и вместо соотношений (3) в E_6 получаем

$$\bar{S}_0 = 3K\bar{\mathcal{E}}_0, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{E}}, \quad \sigma = \Phi(\mathcal{E}). \quad (8)$$

Единичные векторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\mathcal{E}}$ в репере $\{\hat{p}_k\}$ имеют представление

$$\hat{\sigma} = \cos \beta_k \hat{p}_k, \quad \hat{\mathcal{E}} = \cos \alpha_k \hat{p}_k, \quad (9)$$

где β_k, α_k – их угловые координаты;

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\kappa_2} \left[\kappa_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2} \right) \right], \dots \quad (10)$$

– единичные орты естественного репера $\{\hat{p}_k\}$ Френе-Ильюшина в девиаторном подпространстве E_5 ; κ_m ($m=1, 2, 3, 4$) – параметры кривизны и кручения внутренней геометрии траектории деформирования, зависящие от параметра прослеживания процесса

$$s = \int_0^t \sqrt{\frac{d\bar{\Theta}}{dt} \frac{d\bar{\Theta}}{dt}} dt = \int_0^t \sqrt{\frac{d\bar{\Theta}_{ij}}{dt} \frac{d\bar{\Theta}_{ij}}{dt}} dt \quad (11)$$

во времени t . Вопрос о направлении процесса нагружения решается единичным вектором напряжений $\hat{\sigma}$, а вопрос о направлении деформирования – единичным вектором $\hat{\Theta}$. Вектор $\hat{p}_1 = d\bar{\Theta}/ds$, направленный по касательной к траектории деформирования в каждой ее точке, эквивалентен направляющему тензору скоростей деформаций.

Общее определяющее соотношение теории процессов можно представить в естественном репере $\{\hat{p}_k\}$ в виде

$$\bar{\sigma} = P_k \hat{p}_k, \quad (12)$$

где функционалы процесса

$$P_k = \sigma \cos \beta_k \quad (13)$$

отражают скалярные и векторные свойства материалов.

Простейшей теорией пластиичности является теория течения идеальных жесткопластических сред Мизеса, в которой полные деформации $\bar{\Theta}_{ij}$ разлагаются на упругие $\bar{\Theta}_{ij}^e$ и пластические $\bar{\Theta}_{ij}^p$. Первые считаются пренебрежительно малыми, то есть полагается $\bar{\Theta}_{ij} = \bar{\Theta}_{ij}^p$. В этом случае имеет место свободное пластическое течение и выполняется условие $\hat{\sigma} = \hat{p}_1$, материал считается несжимаемым, то есть $\varepsilon_0 = 0$. В этом случае

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{d\bar{\Theta}}{ds}. \quad (14)$$

При этом угол сближения ϑ_1 между векторами $\hat{\sigma}$ и \hat{p}_1 в соприкасающейся плоскости репера $\{\hat{p}_k\}$ в теории Мизеса $\vartheta_1 = 0$, так как $\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1 = 1$; модуль $\sigma = \sigma^T$ где $\sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$, σ_T – предел текучести при растяжении.

Теория процессов для траекторий малой кривизны А. А. Ильюшина [1, 3] обобщает теорию течения Мизеса и допускает упругие деформации и упругопластическое упрочнение материалов. В этой теории предполагается, что $\hat{\sigma} \approx \hat{p}_1$, $\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1 \approx 1$, то есть угол ϑ_1 считается малой величиной, и определяющие соотношения теории процессов для траекторий малой кривизны имеют вид

$$\bar{S}_0 = 3K\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\sigma} = \sigma \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds}, \quad (15)$$

где

$$\sigma = \Phi(s) \quad (16)$$

– универсальная функция Одквиста-Ильюшина для упрочняющихся сред, близкая к закону упрочнения Роша и Эйхингера $\sigma = \Phi(\mathcal{E})$ при простом (пропорциональном) нагружении. Длина дуги траектории деформирования $s > \mathcal{E}$ и в (16) отражает сложное деформирование лишь частично, так как не учитывает его историю, в том числе влияние векторных свойств материалов.

Если вектор напряжений $\bar{\sigma} = \sigma \hat{\sigma}$ лежит в соприкасающейся плоскости естественного репера $\{\hat{p}_k\}$, то

$$\hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 \hat{p}_2, \quad (17)$$

где угол сближения между векторами $\hat{\sigma}$ и \hat{p}_1 равен $\vartheta_1 = \beta_1$. В этом случае вместо определяющих соотношений (15), (16) имеем [5]:

$$\bar{S}_0 = 3K\bar{\mathcal{E}}_0, \quad \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \hat{\sigma}, \quad (18)$$

где для определения угла сближения ϑ_1 в работах [8, 9] получено нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = - \frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1. \quad (19)$$

Из (19) видно, что ϑ_1 явно зависит от кривизны κ_1 траектории деформирования. Если кривизна постоянна, то для малых углов сближения ($\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1$) при постоянном $k = M_1 / \sigma$ уравнение (19) допускает приближенное решение

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* + (\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*) e^{-k\Delta s}, \quad (20)$$

где $\Delta s = s - s_K^T$ – приращение длины дуги после излома траектории деформирования при $s = s_K^T$; ϑ_1^0 – угол сближения в точке излома; $\vartheta_1^* = -\kappa_1/k$ – постоянный угол сближения, который устанавливается в процессе деформирования по траектории постоянной кривизны после исчерпания следа запаздывания векторных свойств материала. Как будет показано ниже, на самом деле угол сближения ϑ_1 монотонно возрастает.

Система уравнений (18), (19) имеет место для произвольных аналитических и неаналитических плоских траекторий деформирования и расширяет возможности исследования процессов при сложном нагружении даже при использовании в ряде теорий пластичности закона упрочнения Одквиста-Ильюшина (16).

К таким теориям и их математическим моделям относится отмеченная теория процессов А.А. Ильюшина для траекторий малой кривизны, близкая к простому нагружению. Для этой теории принимается

$$\sigma = \Phi(s), \quad M_1 = \frac{\Phi(s)}{s} = 2G_p, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 2G_k, \quad (21)$$

где G_p , G_k – пластический и касательный модули сдвига соответственно.

К этим теориям также относится теория пластического течения Прандтля-Рейсса-Хилла для упрочняющихся сред [5]. В этой теории принимается

$$\sigma = \Phi(s), \quad M_1 = 2G, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 2G_\kappa. \quad (22)$$

В теории процессов для траекторий средней кривизны В.С. Ленского, А.С. Кравчука и В.И. Малого принимается [5]

$$\sigma = \Phi(s), \quad M_1 = \alpha_* 2G \quad (0 < \alpha_* < 1), \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 2G_\kappa. \quad (23)$$

В теории процессов для траекторий произвольной кривизны используются аппроксимации В.Г. Зубчанинова [5, 6, 7]

$$\begin{cases} M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q, \\ \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} - \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G \right) f^p, \end{cases} \quad (24)$$

где

$$f = f(\vartheta_1) = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2} \quad (25)$$

– функция сложного нагружения; p, q – экспериментально определяемые параметры (показатели степени); здесь и далее индекс «нолик» относится к величинам в точке излома траектории, для которой длина дуги $s = s_K^t$. Функционалы (24) отражают как скалярные, так и векторные свойства материалов и описывают как активные, так и пассивные процессы сложного нагружения и разгружения материалов.

Для неаналитических траекторий содержащих точки излома траектории деформирования в [5] были предложены аппроксимации вида

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \Phi(s) + A f_0^p \left(1 - e^{-\gamma \Delta s} \right), \\ \frac{d\sigma}{ds} &= \frac{d\Phi}{ds} - \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G \right) f_0^p e^{-\gamma \Delta s}, \\ M_1 &= 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \quad (27)$$

– значение функции сложного нагружения в точке излома траектории; A, γ, p, q – экспериментально определяемые параметры для каждого материала.

Более общие аппроксимации математической теории процессов в плоских задачах, учитывающие все три возможных параметра сложного деформирования $s, \vartheta_1^0, \kappa_1$ были также предложены в [5] и имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \Phi(s, \vartheta_1^0, \kappa_1) = \Phi(s) + A f_0^p \Omega - B \Delta s \kappa_1, \\ \frac{d\sigma}{ds} &= \frac{d\Phi}{ds} + A f_0^p \frac{d\Omega}{ds} - B \frac{d}{ds} (\Delta s \kappa_1), \end{aligned}$$

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q, \quad (28)$$

где

$$\Omega = - \left[\gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b (1 - e^{-\gamma \Delta s}) \right] \quad (29)$$

– функция сложного нагружения, описывающая «нырок» напряжений и обобщенный эффект Баушингера; A, B, b, γ, p, q – экспериментально определяемые параметры для каждого конструкционного материала.

Приведенные основные уравнения математической модели теории процессов в плоских задачах (18), (19) при конкретизированных функционалах (28) и соответствующих начальных условиях для $\bar{\sigma}$ и ϑ_1 составляющие задачу Коши, позволяют с помощью численного метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности [10] получить их решение, а также производить верификацию различных вариантов теории пластичности при сравнении расчетных и опытных данных.

2. Экспериментальное обоснование достоверности математической модели теории процессов

Экспериментальное исследование по верификации теоретических расчетных данных было выполнено на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета на трубчатых образцах из стали 45 с механическими характеристиками $\sigma^T = 285$ МПа, $2G = 1,577 \cdot 10^5$ МПа, $E = 2,05 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$. Образцы имели толщину стенки $h = 1$ мм, диаметр срединной поверхности $d = 31$ мм, длину рабочей части $l = 110$ мм. На рис. 1 представлена диаграмма простого нагружения материала образцов при растяжении и ее аппроксимация с помощью выражений

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha} (1 - e^{-\alpha s}), & \text{при } 0 \leq s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_* (s - s^T) + \sigma_* (1 - e^{-\beta(s-s^T)}), & \text{при } s > s^T, \end{cases} \quad (30)$$

где $s = \dot{\varepsilon}$, $\sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_t$, σ_t – предел текучести при растяжении, σ_* , α , β , G_* – экспериментально определяемые постоянные параметры.

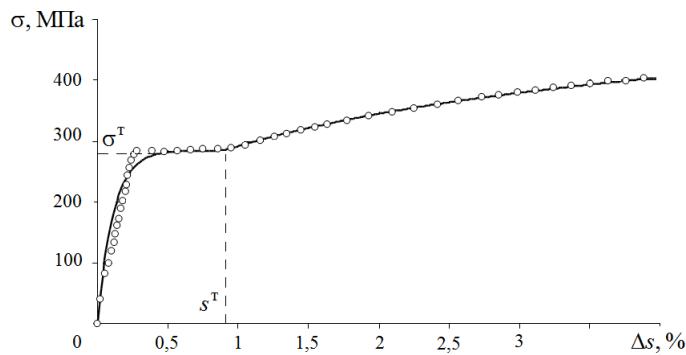


Рис. 1. Диаграмма простого нагружения материала сталь 45.

Кружочками на рис. 1 отмечены экспериментальные точки диаграммы в плоскости

σ – сплошной линией – ее аппроксимация. При обработке диаграммы деформирования получены следующие численные значения параметров аппроксимации: $\sigma^T = 285$ МПа, $s^T = 9 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 70$, $\alpha = 900$, $\sigma_* = 78,8$ МПа, $2G_* = 1619$ МПа.

На рис. 2 приведена реализованная в опыте на трубчатом образце из стали 45 двузвенная неаналитическая траектория деформирования в плоскости $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3)$ девиаторного подпространства E_5 . Траектория состоит из первого прямолинейного участка $0K$ и второго участка в виде окружности радиуса $R = 1,75\%$ и кривизны $\kappa_1 \approx 57,1$. В точке K траектория претерпевает излом на угол $\vartheta_1^0 = 90^\circ$.

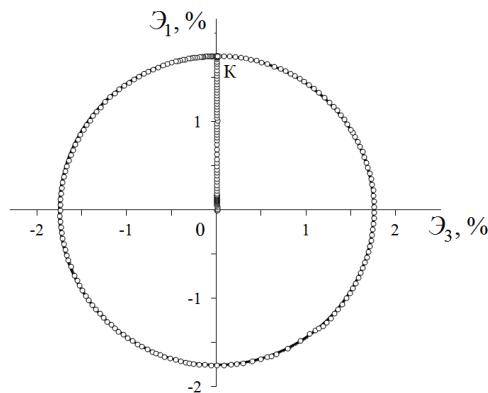


Рис. 2. Траектория деформирования в плоскости $\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_3$.

На рис. 3 приведен отклик на реализованную траекторию деформирования в плоскости (S_1, S_3) совмещенного девиаторного подпространства напряжений и деформаций E_5 , где экспериментальные точки представлены также в виде кружочков.

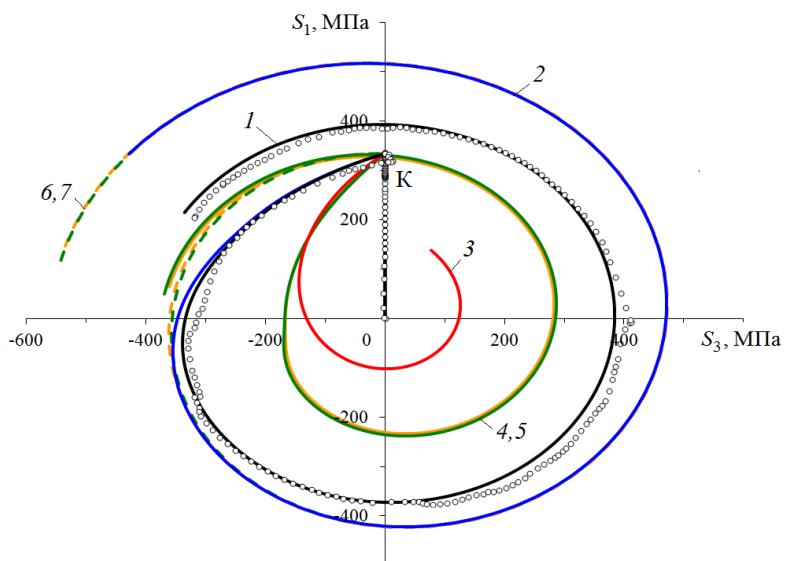


Рис. 3. Отклик в плоскости S_1-S_3 .

Параметры A, B, γ, b, p, q входящие в выражения функционалов процесса (28), (29) определялись согласно методике, изложенной в [5], на основе базовых опытов по типу веера траекторий. В результате обработки экспериментальных данных для

реализованной программы сложного деформирования получены следующие значения параметров: $A = 370,2$ МПа, $B = 23$ МПа, $\gamma = 386,8$, $b = 0,125$, $p = 1,8$, $q = 0,5$. Кривая 1 (черным цветом) на рис. 3 отвечает полученным расчетным данным согласно изложенной выше математической модели теории процессов в плоских задачах, учитывающей все параметры сложного нагружения $s, \kappa_1, \vartheta_1^0$. Функционалы процесса (28), (29) описывают прямые и обратные «нырки» напряжений и обобщенный на сложное нагружение эффект Баушингера [11]. Полученные расчетные данные (кривая 1) достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным.

Кривая 2 (синим цветом) получена в предположении $B = 0$ в функционалах процесса (28), то есть отсутствия влияния кривизны κ_1 траектории. Это означает, что такой расчет соответствует ломанным траекториям с прямолинейными участками и неизбежно приводит к ошибочному результату для реализованной криволинейной траектории. В работе [12] использование функционалов в таком виде позволило достоверно отразить процессы сложного деформирования стали 45 для ломанных прямолинейных траекторий с углом излома $\vartheta_1^0 = 135^\circ$.

Кривые 3–7 на рис. 3 соответствуют группе теорий пластичности и их моделям, в которых используется закон упрочнения Одквиста-Ильюшина (16) для отражения скалярных свойств материалов в активных процессах упругопластического деформирования без учета влияния параметров сложного нагружения κ_1, ϑ_1^0 . В то же время в определяющих соотношениях (18), (19) сохраняется дифференциальное уравнение для определения угла сближения ϑ_1 и, как следствие этого – его влияние на величину вектора напряжений $\bar{\sigma}$.

Кривая 3 (красным цветом) на рис. 3 построена при значениях функционалов по (21) при начальном условии $\vartheta_1^0 = 0$, то есть для случая гладкой траектории, соответствующей теории А.А. Ильюшина для траекторий малой кривизны. Результат существенно отличается от опытных данных. Кривые 4 (зеленым цветом) и 5 (оранжевым цветом) соответствуют расчетам по теории течения Прандтля-Рейсса-Хилла (22) и теории процессов для траекторий средней кривизны Ленского-Кравчука-Малого (23) соответственно для гладких траекторий $\vartheta_1^0 = 0$, а кривые 6 (зеленым цветом, штриховая) и 7 (оранжевым цветом, штриховая) соответствуют тем же теориям при $\vartheta_1^0 = 90^\circ$ для реализованной в опыте траектории с этим углом излома. В (23) принималось $\alpha_* = 0,75$. Как видно из рис. 3, влияние угла излома траектории ϑ_1^0 достаточно существенно. В то же время учет реального угла излома траектории и величины кривизны κ_1 дает для этих теорий ошибочные результаты.

На рис. 4, 5 приведены результаты расчетов и опытных данных при построении диаграмм прослеживания процесса деформирования между σ и s , характеризующих скалярные свойства материалов, и между ϑ_1 и приращением дуги после точки излома Δs , характеризующих их векторные свойства. Все кривые на этих и последующих рисунках имеют ту же нумерацию и цвет, что и на рис. 3. Как видно, кривые 3, 4, 5, отвечающие теориям процессов малой и средней кривизны и отмеченная выше теория течения дают ошибочные результаты по сравнению с опытными данными. Кривая 3 на рис. 5 показывает, что по теории процессов малой кривизны угол сближения монотонно возрастает. Приближенное решение (20) определяющего соотношения (19) в работах [13, 14] для траекторий постоянной кривизны показало, что в процессе деформирования угол сближения ϑ_1 практически стабилизируется и становится

равным $\vartheta_1^* = 30^\circ - 40^\circ$, что приближенно подтверждается. В этих работах удалось установить для стали 45 примерный интервал кривизны для траекторий малой кривизны ($0 < \kappa_1 \leq \kappa_1^* = 50$) и траекторий средней кривизны ($\kappa_1^* < \kappa_1 \leq \kappa_1^{**} \approx 200$).

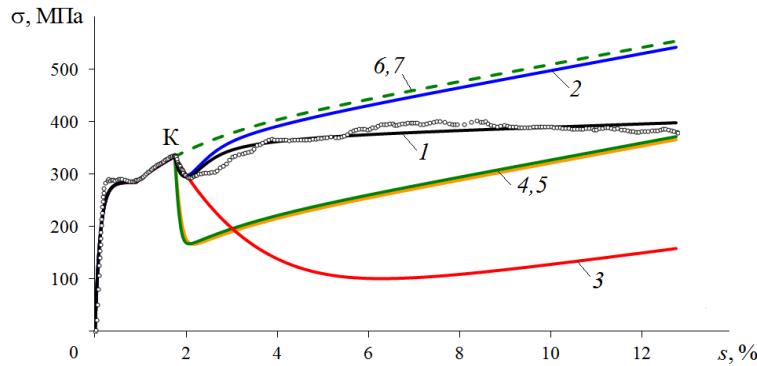


Рис. 4. Диаграмма прослеживания процесса деформирования $\sigma - s$.

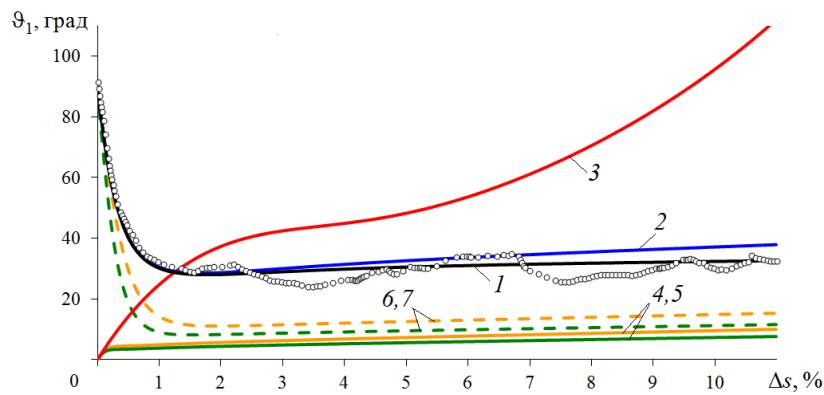


Рис. 5. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$.

На рис. 6, 7 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия $S_1 - \vartheta_1$ и чистого сдвига $S_3 - \vartheta_3$, а на рис. 8, 9, 10 – расчетные данные для используемых в расчете аппроксимаций функционалов $d\sigma/ds$, M_1 , $M = d\sigma/ds - M_1 \cos \vartheta_1$ в зависимости от изменения длины дуги Δs траектории деформирования для различных вариантов математических моделей.

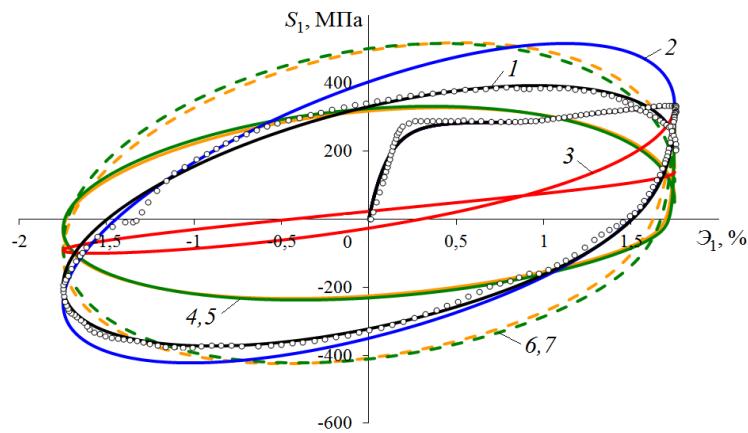
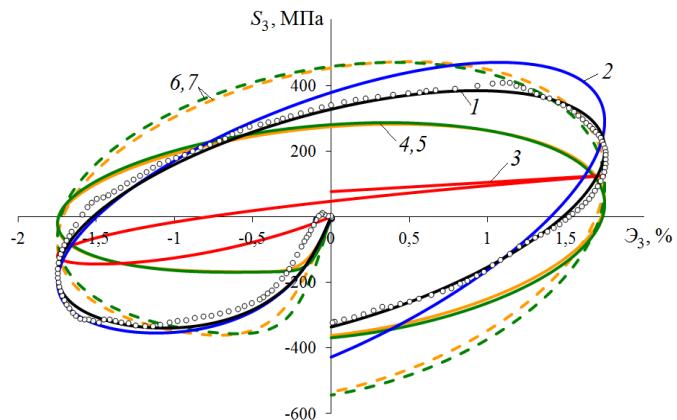
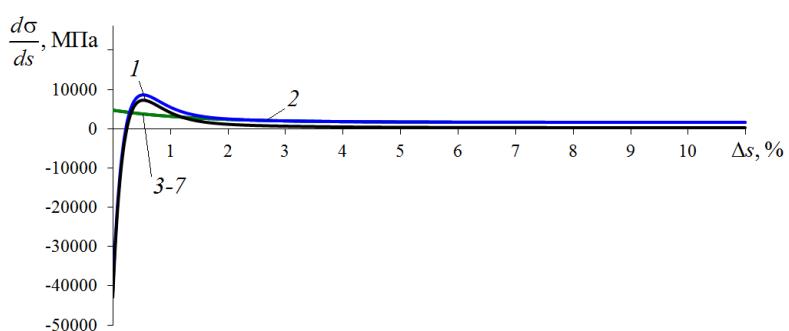
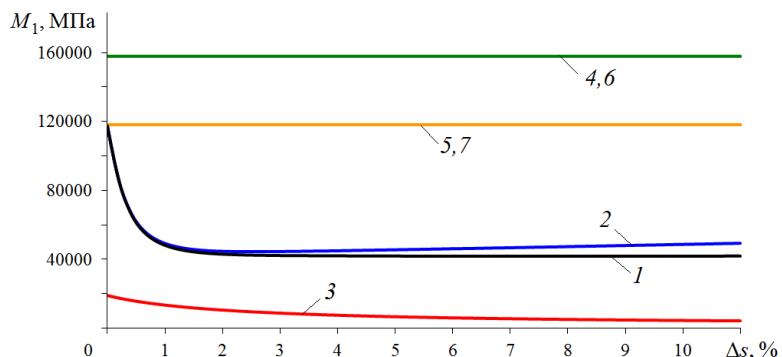
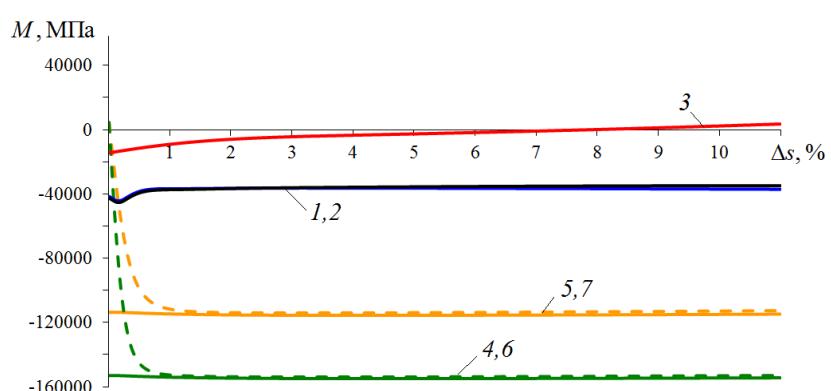


Рис. 6. Локальная диаграмма $S_1 - \vartheta_1$.

Рис. 7. Локальная диаграмма $S_3 - \mathcal{E}_3$.Рис. 8. Зависимость $d\sigma/ds - \Delta s$.Рис. 9. Зависимость $M_1 - \Delta s$.Рис. 10. Зависимость $M - \Delta s$.

3. Выводы

Анализ полученных результатов позволил сделать следующие выводы.

1. Верификация истинности положений математической модели теории процессов в плоских задачах при деформировании по криволинейным траекториям постоянной кривизны при их сопоставлении с полученными экспериментальными данными дала достоверные результаты (кривая 1).

2. Варианты теории пластичности, использующие закон упрочнения Одквиста-Ильюшина, но не учитывающие в численных расчетах угол сближения ϑ_1 , характеризующий векторные свойства материала, заметно отличаются от опытных данных.

3. При деформировании материала по гладкой траектории постоянной кривизны угол сближения ϑ_1 монотонно возрастает, что уточняет известные приближенные решения о его стремлении к постоянному значению.

Литература

- [1] А.А. Ильюшин, *Пластичность. Основы общей математической теории* (Издательство АН СССР, Москва, 1963).
- [2] А.А. Ильюшин, *Труды (1946-1966). Т.2. Пластичность* (Физматлит, Москва, 2004).
- [3] А.А. Ильюшин, *Пластичность. Упругопластические деформации* (Гостехиздат, Москва, 1948).
- [4] А.А. Ильюшин, *Механика сплошной среды* (Издательство МГУ, Москва, 1990).
- [5] В.Г. Зубчанинов, *Механика процессов пластических сред* (Физматлит, Москва, 2010).
- [6] В.Г. Зубчанинов, *Устойчивость и пластичность. Т.2. Пластичность* (Физматлит, Москва, 2008).
- [7] В.Г. Зубчанинов // *Известия РАН. МТТ* **21** (2011) 27.
- [8] В.С. Ленский // *Известия АН СССР. ОТН* **5** (1962) 154.
- [9] Дао Зуй Бик // *Вестник МГУ. Математика. Механика* **2** (1965) 67.
- [10] Л.И. Турчак, П.В. Плотников, *Основы численных методов* (Физматлит, Москва, 2003).
- [11] В.В. Москвитин, *Пластичность при переменных нагружениях* (Издательство МГУ, Москва, 1965).
- [12] В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гультяев // *Проблемы прочности и пластичности* **76** (2014) 18.
- [13] В.Г. Зубчанинов, Е.Г. Алексеева // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния* **19** (2014) 78.
- [14] В.Г. Зубчанинов, Е.Г. Алексеева // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния* **20** (2014) 21.

MATHEMATICAL MODELING OF PLASTIC DEFORMATION OF MATERIALS ON COMPLEX FLAT TRAJECTORIES

V.G. Zubchaninov, A.A. Alekseev*, E.G. Alekseeva

Tver State Technical University, nab. Afanasiya Nikitina, 22, Tver, 170026, Russia

*e-mail: alexeew@bk.ru

Abstract. The basic equations and relations of the theory of elastic-plastic deformation processes in plane problems are presented for arbitrary paths, with both the generalized Baushinger's effect under complex loading and secondary plastic deformation taken into consideration. In solution of the basic equations using universal approximations of functionalities of processes, the fourth-order accuracy Runge-Kutta numerical method is utilized. In order to validate the reliability of calculated data, results of our simulations are compared with the corresponding experimental data obtained using the SN-EVM testing system.

References

- [1] A.A. Ilyushin, *Plasticity: Fundamentals of the general mathematical theory* (Izdatelstvo AN SSSR, Moscow, 1963).
- [2] A.A. Ilyushin, *Proceedings (1946-1966). Vol. 2 Plasticity* (Fizmatlit, Moscow, 2004).
- [3] A.A. Ilyushin, *Plasticity: Elastic-plastic Deformations* (Gostekhizdat, Moscow, 1948).
- [4] A.A. Ilyushin, *Continuum Mechanics* (Izdatelstvo MGU, Moscow, 1990).
- [5] V.G. Zubchaninov, *Mechanics of processes of plastic environments* (Fizmatlit, Moscow, 2010).
- [6] V.G. Zubchaninov, *Stability and plasticity. Vol. 2. Plasticity* (Fizmatlit, Moscow, 2008).
- [7] V.G. Zubchaninov // *Mechanics of Solids* **46** (2011) 21.
- [8] V.S. Lenskii // *Izvestiia AN SSSR. OTN* **5** (1962) 154.
- [9] Dao Zui Bik // *Vestnik MGU. Matematika. Mekhanika* **2** (1965) 67.
- [10] L.I. Turchak, P.V. Plotnikov, *Osnovy chislennykh metodov* (Fizmatlit, Moscow, 2003).
- [11] V.V. Moskvitin, *Plastichnost' pri peremennykh nagruzheniakh* (Izdatelstvo MGU, Moscow, 1965).
- [12] V.G. Zubchaninov, A.A. Alekseev, V.I. Gul'tiaev // *Problemy prochnosti i plastichnosti* **76** (2014) 18.
- [13] V.G. Zubchaninov, E.G. Alekseeva // *Vestnik ChGPU im. I. Ia. Iakovleva. Seriia: Mekhanika predel'nogo sostoianiiia* **19** (2014) 78.
- [14] V.G. Zubchaninov, E.G. Alekseeva // *Vestnik ChGPU im. I. Ia. Iakovleva. Seriia: Mekhanika predel'nogo sostoianiiia* **20** (2014) 21.