

# **АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ НАПЛАВЛЕННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ КОНТАКТНЫХ НАГРУЗКАХ**

**В.Д. Сарычев, С.А. Невский\*, В.Е. Громов**

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, 654007, Россия

\*e-mail: nevskiy.sergei@yandex.ru

**Аннотация.** Проведен анализ напряженно-деформированного состояния на границе «наплавленный поверхностный слой – подложка» методами теории упругости неоднородных сред, при воздействии распределенной по кругу нагрузки. Получено решение пространственной задачи в виде ряда, содержащего гипергеометрическую функцию. Получены зависимости максимальных значений напряжений от линейных размеров наплавленного материала. Показано, что создание жесткого покрытия играет благоприятную роль, уменьшая максимум нормального напряжения.

## **1. Введение**

Известно, что различные внешние воздействия приводят к тому, что структура, фазовый состав и дефектная субструктура материалов становятся неоднородными по глубине [1]. К числу таких воздействий относятся концентрированные потоки энергии [2 – 4], большие пластические деформации [5 – 8] и процессы длительной эксплуатации, например, рельсов [9, 10]. Нарушение однородности материалов, путем образования резких переходных слоев, приводит к тому, что на их границах образуются микротрещины. Их наличие приводит к снижению усталостной долговечности [11], износостойкости, твердости [12] и других характеристик. С другой стороны, наличие градиентных структур способствует увеличению эксплуатационных свойств изделий [13]. В этой связи исследование напряженно-деформированного состояния материалов с градиентной структурой с целью поиска оптимальных режимов обработки является актуальной задачей.

В настоящее время предложено большое число методов расчета напряженно-деформированного состояния неоднородных сред. Эти методы условно можно разделить на три группы: аналитические, численные и численно-аналитические. Для аналитических методов характерно то, что в них учитывается относительная толщина покрытия. Это позволяет привлекать асимптотические разложения. В результате получаются удобные для исследования выражения. В этом направлении следует отметить работы [14, 15], где асимптотические методы применялись для решения различного спектра задач. В [16, 17] эти методы были обобщены на материалы с градиентом механических свойств. Недостатком подхода [14 – 17] является необходимость решения парных интегральных уравнений, при этом расчеты зависимостей полей напряжений в расчетной области носят иллюстративный характер, и нет анализа особенностей их распределений, а основной упор делается на расчетах ширины и глубины зоны контакта и характера распределений контактных напряжений.

В качестве альтернативы этому подходу можно предложить градиентную теорию упругости [18, 19]. Основной идеей этой теории является введение в обобщенный закон Гука дополнительных членов, учитывающих градиент механических свойств, однако коэффициенты при этих членах являются подгоночными и чаще всего трудно определить их физический смысл. В работах [20, 21] предлагается матричный метод решения задач теории упругости неоднородных сред. Его суть заключается в том, что связь между условиями на границах слоев задается матрицами перехода. После ее построения используются рекуррентные формулы для расчета вектора первого (начального) слоя, включающего продольные и поперечные смещения, а также нормальные и касательные напряжения [20]. Однако в случае большого количества слоев эти матрицы становятся громоздкими. Несмотря на данный недостаток, матричные алгоритмы успешно применяются для решения задач о распространении волн в слоисто-неоднородных средах [21], деформационного поведения обработанных низкоэнергетическим сильноточным электронным пучком материалов [22].

Интенсивное развитие вычислительной техники привело к появлению стандартных математических пакетов основанных на методе конечных элементов. Использование этих пакетов требует работы по их адаптации к имеющимся задачам, а также понимания особенностей контактного взаимодействия контртел с покрытиями для подбора адекватной сетки разбиения на элементы. Преимуществом этих методов является возможность исследования трехмерных задач, учет трения в контактных задачах, возможность введения неупругих элементов. К недостаткам следует отнести сложности при исследовании точечного контакта, а также относительно длительное время расчетов. Кроме того, при подобных расчетах невозможно получить адекватное решение при наличии точек или линий концентрации напряжений. Решению трехмерных задач посвящены работы [23 -25]. В [23] проведен квазистатический анализ многослойных металлических конструкций на основе двумерной теории упругости. В результате получено решение в виде рядов Прони с временной добавкой. Применительно к асфальто-бетонным покрытиям позволило проанализировать влияние длительности нагрузки на напряженно-деформированное состояние. В [24] методом конечных элементов решена задача об износе многослойных покрытий нанесенных лазерным методом. В результате было установлено, что такие характеристики рельефа поверхности, как высокая локальная кривизна, насечки, крупные частицы оказывают существенное влияние на износостойкость материалов. В [25] разработана многомасштабная модель трехслойных сотовых конструкций, позволяющая вычислять эффективные упругие и прочностные характеристики сотовых заполнителей и силовых обшивок, а также рассчитывать напряженно-деформированное состояние конструкции в рамках трехмерной теории упругости неоднородных сред. На основе трехмерного конечно-элементного моделирования показано, что при четырехточечном изгибе трехслойной сотовой пластины максимальные значения изгибных и касательных напряжений реализуются в зоне приложения нагрузки и действия опор пластины, причем локальные максимумы напряжений превосходят "балочные" значения изгибающих напряжений и касательных напряжений.

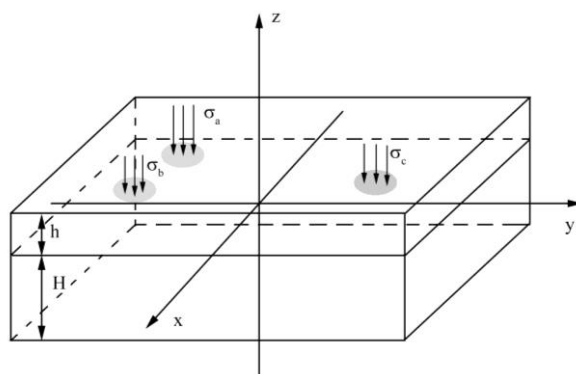
В отличие от аналитических и численных методов численно-аналитические решения контактных задач для слоистых упругих тел не предполагают каких-либо ограничений, налагаемых на относительную толщину либо относительную жесткость покрытий. При этом численные расчеты используются только на конечном этапе решения. В основу этих методов положены интегральные преобразования Фурье и Ханкеля. Основной проблемой этих методов является корректность численного обращения трансформант [26]. Эти методы в последнее время находят применение для решения задач о скольжении гладкого индентора по вязкоупругому основанию [27],

моделированию накопления контактно-усталостных повреждений в двухслойном пространстве при неполном сцеплении слоев [28], эволюции профилей колеса и рельса [29]. В этих работах применялся принцип локализации, который состоит в том, что как дискретные единицы рассматриваются неровности, ближайшие к произвольно выбранной, действие остальных заменяется приложенной распределенной нагрузкой.

Исходя из вышеизложенного сформулируем цель нашей работы – анализ напряженно-деформированного состояния наплавленного материала при контактом нагружении с помощью матричных алгоритмов теории упругости неоднородных сред.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о равновесии полосы, которая занимает область  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $-h \leq z \leq h$ . Для удобства примем толщину пластины равной  $2h$ , а плоскость  $xu$  проходит через середину пластины (Рисунок 1).



**Рис. 1.** К постановке задачи, о равновесии упругой полосы сцепленной с полупространством

Уравнения равновесия и обобщенный закон Гука запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \\ \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Зададим условия на границе слоев:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, y, h) &= \sigma_+(x, y), \sigma_{zz}(x, y, -h) = \sigma_-(x, y); \\ \sigma_{xz}(x, y, h) &= \tau_{x+}(x, y), \sigma_{xz}(x, y, -h) = \tau_{x-}(x, y); \\ \sigma_{yz}(x, y, h) &= \tau_{y+}(x, y), \sigma_{yz}(x, y, -h) = \tau_{y-}(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставим уравнения закона Гука в условие равновесия и применим двумерное преобразование Фурье, в итоге получим

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu)(U'' - n^2 U) + k(iW' - (kU + mV)) &= 0, \\ (1 - 2\nu)(V'' - n^2 V) + m(iW' - (kU + mV)) &= 0, \\ (1 - 2\nu)(W'' - n^2 W) + W'' + i(kU' + mV') &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

Выразим линейную комбинацию двух первых уравнений (3) и введем обозначение,  $F = kU + mV$ ,  $\Phi = mU - kV$ , тогда (3) сводится к системе:

$$\frac{d^4 F}{dz^4} - 2n^2 \frac{d^2 F}{dz^2} + n^4 F = 0, \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - n^2 \Phi = 0; \quad (4)$$

$$W = \frac{i}{n^3} (2(1-\nu)F''' + (2\nu-3)n^2 F')$$

Общее решение (4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} F(z) &= A_1 ch(nz) + B_1 nz sh(nz) + A_2 sh(nz) + B_2 nz ch(nz) \\ W(z) &= -i(A_1 sh(nz) - (nz ch(nz) + sh(nz)(4\nu-3))B_1 - \\ &- A_2 ch(nz) - (nz sh(nz) + ch(nz)(4\nu-3))B_2, \\ \Phi(z) &= C_1 sh(nz) + C_2 ch(nz) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $A_1, A_2, B_1, B_2$  – произвольные постоянные.

Закон Гука и граничные условия(2) в трансформантах Фурье примут вид:

$$\Sigma_{zz} = \frac{2\mu}{1-2\nu} ((1-\nu)W' + i\nu nF), \Sigma_{xz} = \mu(U' + ikW), \Sigma_{yz} = \mu(V' + imW). \quad (6)$$

$$\Sigma_{zz}(\pm h) = \Sigma_{\pm}; \quad \Sigma_{xz}(\pm h) = T_{x\pm}; \quad \Sigma_{yz}(\pm h) = T_{y\pm}.$$

Выразим линейные комбинации  $\Sigma_{xz}, \Sigma_{yz}$ , в виде  $T = k\Sigma_{xz} + m\Sigma_{yz}$  и  $T_\Phi = m\Sigma_{xz} - k\Sigma_{yz}$ . Тогда

$$T = \mu n(F' + inW), T_\Phi = \mu n\Phi'. \quad (7)$$

Таким образом трехмерная задача свелась к двум: двумерной с величинами  $F, W, \Sigma, T$  и одномерной с величинами  $\Phi$  и  $T_\Phi$ .

### 3. Связь перемещений и напряжений на границах слоев для конечного слоя

Подставим первое и второе уравнение (5) в (6) и при  $z = \pm h$  в получим систему для определения  $A_1, A_2, B_1, B_2$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 2i(A_1 \mu ch(nh)n - (\mu sh(nh)nz^2 - 2\mu n(1-2\nu)ch(nh))B_1 - A_2 \mu sh(nh)n + \\ &+ (\mu ch(nh)nz^2 - 2\mu n(1-2\nu)sh(nh))B_2, \\ T_1 &= 2\mu(A_1 sh(nh)n + B_1(ch(nh)nz^2 - n(1-2\nu)sh(nh)) + A_2 ch(nh)n + \\ &+ B_2(sh(nh)nz^2 - n(1-2\nu)ch(nh)), \\ \Sigma_2 &= 2i(A_1 \mu ch(nh)n + (\mu sh(nh)nz^2 + 2\mu n(1-2\nu)ch(nh))B_1 + A_2 \mu sh(nh)n + \\ &+ (\mu ch(nh)nz^2 + 2\mu n(1-2\nu)sh(nh))B_2, \\ T_2 &= 2\mu(-A_1 sh(nh)n + B_1(ch(nh)nz^2 + n(1-2\nu)sh(nh)) + A_2 ch(nh)n + \\ &+ B_2(-sh(nh)nz^2 - n(1-2\nu)ch(nh)). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение (8) запишем в виде:

$$A_1 = \frac{1}{4\mu n\Delta} (i(nhch(nh) - (1-2\nu)sh(nh))(\Sigma_1 + \Sigma_2) + (2(1-\nu)ch(nh) - nhsh(nh))(T_1 - T_2)),$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_1} \left( -ish(nh)(\Sigma_1 + \Sigma_2) + ch(nh)(T_1 - T_2) \right), \Delta_1 = (sh(nh)ch(nh) + nh), \\
A_2 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_2} \left( i(nsh(nh) - (1 - 2\nu)ch(nh))(\Sigma_1 - \Sigma_2) + ((2(1 - \nu)sh(nh) - nhch(nh)))(T_1 + T_2) \right), \quad (9) \\
B_2 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_2} \left( -ich(nh)(\Sigma_1 - \Sigma_2) + sh(nh)(T_1 + T_2) \right), \Delta_2 = (sh(nh)ch(nh) - nh).
\end{aligned}$$

Подставим (9) в первое и второе уравнение (5) в итоге получим зависимости трансформант перемещений на границах слоя как функции трансформант граничных напряжений:

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_{11}\Sigma_1 + f_{12}\Sigma_2 + f_{13}T_1 + f_{14}T_2; \\
F_2 &= f_{21}\Sigma_1 + f_{22}\Sigma_2 + f_{23}T_1 + f_{24}T_2; \\
W_1 &= w_{11}\Sigma_1 + w_{12}\Sigma_2 + w_{13}T_1 + w_{14}T_2; \\
W_2 &= w_{21}\Sigma_1 + w_{22}\Sigma_2 + w_{23}T_1 + w_{24}T_2;
\end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{i(\alpha^2 + (1 - 2\nu)sh^2\alpha)}{2n\mu\Delta}, f_{12} = \frac{i\alpha(1 - \nu)sh\alpha}{n\mu\Delta}, f_{13} = -\frac{i(1 - \nu)(sh2\alpha - 2\alpha)}{2n\mu\Delta}, \\
f_{14} &= \frac{(1 - \nu)(sh\alpha - \alpha ch\alpha)}{n\mu\Delta}; f_{21} = \frac{i\alpha(1 - \nu)sh\alpha}{n\mu\Delta}, f_{22} = \frac{i(\alpha^2 + (1 - 2\nu)sh^2\alpha)}{2n\mu\Delta}, \\
f_{23} &= \frac{(1 - \nu)(sh\alpha - \alpha ch\alpha)}{n\mu\Delta}, f_{24} = \frac{(1 - \nu)(sh2\alpha - 2\alpha)}{2n\mu\Delta}; \\
w_{11} &= \frac{(1 - \nu)(sh(2\alpha) + 2\alpha)}{2\mu n\Delta}, w_{12} = -\frac{(1 - \nu)(sh(\alpha) + zch(\alpha))}{\mu n\Delta}, w_{13} = \frac{i(\alpha^2 + sh^2(\alpha)(1 - 2\nu))}{2\mu n\Delta}, \quad (11) \\
w_{14} &= \frac{i\alpha(sh(\alpha)(1 - \nu))}{\mu n\Delta}; w_{21} = \frac{(1 - \nu)(\alpha ch(\alpha) + sh(\alpha))}{\mu n\Delta}, w_{22} = -\frac{(1 - \nu)(sh(2\alpha) + 2\alpha)}{2\mu n\Delta}, \\
w_{23} &= \frac{iz(sh(\alpha)(1 - \nu))}{\mu n\Delta}, w_{24} = \frac{i(\alpha^2 + sh^2(\alpha)(1 - 2\nu))}{2\mu n\Delta};
\end{aligned}$$

$$\Delta = \Delta_1\Delta_2 = sh^2(\alpha) - \alpha^2, \alpha = nh$$

Формулы (10, 11) будут использоваться ниже, для формулировки сопряженной задачи.

#### 4. Граничная задача для полупространства

Пусть полупространство занимает область  $z < 0$ . Воспользуемся формулами (10, 11), считая, что

$$F_{I\infty} = F(0), W_{\infty I} = W(0), \Sigma_{I\infty} = \Sigma(0), T_{I\infty} = T(0), F_2 = W_2 = \Sigma_2 = T_2 = 0. \quad (12)$$

Тогда выражения для смещений при  $z = 0$  выражается через напряжения по формулам

$$\begin{aligned}
F_{I\infty} &= f_{11\infty}\Sigma_{I\infty} + f_{13\infty}T_{I\infty}, W_{I\infty} = w_{11\infty}\Sigma_{I\infty} + w_{13\infty}T_{I\infty}, \\
f_{11\infty} &= \lim_{h \rightarrow \infty} f_{11}, f_{13\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} f_{13}, w_{11\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} w_{11}, w_{13\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} w_{13}.
\end{aligned} \quad (13)$$

Необходимо отметить, что коэффициент Пуассона и модуль сдвига отличаются от аналогичных величин для слоев.

### 5. Сопряженная задача слоя и полупространства

Вернемся к Рис. 1 и будем считать, что слой толщины  $h$  с упругими характеристиками  $(\mu_1, \nu_1)$  расположен на полупространстве  $(\mu_2, \nu_2)$ . На границе сопряжения выполнены условия равенства напряжений и смещений

$$F_{2s} = F_{1\infty}, W_{2s} = W_{1\infty}, \Sigma_{2s} = \Sigma_{1\infty} = \Sigma, T_{2s} = T_{1\infty} = T. \quad (14)$$

Используем (10) и (13) для получения системы для контактных напряжений  $\Sigma, T$ .

$$\begin{aligned} f_{21}\Sigma_1 + f_{22}\Sigma + f_{23}T_1 + f_{24}T &= f_{11\infty}\Sigma + f_{13\infty}T, \\ w_{21}\Sigma_1 + w_{22}\Sigma + w_{23}T_1 + w_{24}T &= w_{11\infty}\Sigma + w_{13\infty}T. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение системы (15)

$$\Sigma = \Sigma_{ss} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_{st} \cdot T_1; T = T_{ts} \cdot \Sigma_1 + T_{ss} \cdot T_1. \quad (16)$$

Выражения  $\Sigma_{ss}, \Sigma_{st}, T_{ts}, T_{ss}$  и  $\Sigma_1, T_1$  полностью определяют напряжения на линии контакта.

Выпишем  $\Sigma_{ss}, \Sigma_{st}, T_{ts}, T_{ss}$  в преобразованном виде

$$\begin{aligned} \Sigma_{ss} &= -\frac{1}{2} \frac{(((2(1-\alpha)L - 1 + 2\alpha)K - L)\exp(-\alpha) - (2(1-\alpha) + L + (1+2z)K)\exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL\exp(-2\alpha)}, \\ \Sigma_{st} &= \frac{1}{2} \frac{(((2\alpha(L-1) - 1)K + L)\exp(-\alpha) - (2\alpha + (1-2\alpha)K - L)\exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL\exp(-2\alpha)}, \\ T_{ts} &= -\frac{1}{2} \frac{(((2\alpha(L-1) - 1)K + L)\exp(-\alpha) - (2\alpha + (1-2\alpha)K - L)\exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL\exp(-2\alpha)}, \\ T_{ss} &= \frac{1}{2} \frac{(((2(1+\alpha)L - 1 - 2\alpha)K - L)\exp(-\alpha) - (2(1-\alpha) - L - (1-2z)K)\exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL\exp(-2\alpha)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\alpha = nh$$

$$B = \frac{\mu_2}{\mu_1}, K = \frac{1-B}{1+B(3-4\nu_1)}, L = \frac{(3-4\nu_2) - B(3-4\nu_1)}{(3-4\nu_2) + B}$$

где  $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона покрытия и подложки соответственно.

Выражения (17) и безразмерные переменные (18) впервые были получены в [30] для осесимметричного случая. В нашей трехмерной задаче эти выражения появляются естественным образом. Так как касательные напряжения на границе слоя и штампа возникают благодаря силе трения, то они выражаются через нормальное напряжение, поэтому выпишем только трансформанту Фурье  $\Sigma_1$ . Для этого представим двумерное преобразование Фурье напряжений при  $z = h$

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma(k, m, h) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z(x, y, h) \exp(-i(kx + my)) dx dy. \quad (18)$$

Будем считать, что нормальные напряжения распределены равномерно с постоянным значением напряжения  $\sigma_l$  по кругам  $D_l$ , центры которых расположены в

точках с координатами  $x_l, y_l$ , радиусами  $r_l$ , где  $l$  номер круга,  $L$  – количество кругов. Значит, нормальные напряжения при  $z = h$  можно записать в виде:

$$\sigma_z(x, y, h) = \sum_{l=1}^L \sigma_l \Omega(x, y, x_l, y_l). \quad (19)$$

Здесь  $\Omega(x, y, x_l, y_l)$  носитель  $D_l$ , т.е.  $\Omega(x, y, x_l, y_l) = 1$ ,  $\Omega(x, y, x_l, y_l) = 0$ ,  $(x, y) \notin D_l$ .

Пусть область  $D$  круг в плоскости  $(x, y)$  с центром в точке  $x_l, y_l$  и радиусом  $r_l$ . Тогда интеграл, входящий в (18) можно выразить

$$S_l = \sigma_l \iint_{D_l} \exp(-i(kx + my)) dx dy = \sigma_l \exp(-i(kx_l + my_l)) \frac{J_1(r_l n)}{n}. \quad (20)$$

Тогда трансформанту нормальных напряжений можно задать по формуле

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2\pi n} \sum_{l=1}^L \sigma_l J_1(r_l n) \exp(-i(kx_l + my_l)). \quad (21)$$

## 6. Обратное преобразование Фурье

Используя (17) и (21) можно записать трансформанту нормальных напряжений на контакте слоев. Представим схему нахождения обратного преобразования Фурье на примере одного слагаемого из (21).

$$\Sigma = \Sigma_{ss} \cdot J_1(r_l n) \exp(-i(kx_l + my_l)). \quad (22)$$

Тогда обратное преобразование Фурье выражается по формуле

$$\sigma_z(x, y, 0) = \int_0^\infty \Sigma_{ss}(nh) J_1(r_l n) J_0(r_{pl} n) dn, \quad (23)$$

где  $r_{pl} = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}$ .

Для нахождения интеграла в (23) представим произведение функций Бесселя в виде ряда [31]

$$J_0(\tilde{r}_l n) J_1(r_l n) = \frac{n r_l}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p n^{2p}}{4^p (p!)^2} (r_{pl})^{2p} F(-p, -p; 2; (r_l / r_{pl})^2). \quad (24)$$

Здесь  $F(-p, -p; 2; \beta)$  – гипергеометрическая функция, которая выражается через полиномы степени  $p$ :

$$\begin{aligned} P_0(\beta) &= 1, P_1(\beta) = 1 + \frac{1}{2}\beta, P_2(\beta) = 1 + 2\beta + \frac{1}{3}\beta^2 \\ P_3(\beta) &= 1 + \frac{9}{2}\beta + 3\beta^2 + \frac{1}{4}\beta^3, P_4(\beta) = 4\beta^3 + 12\beta^2 + 8\beta + \frac{1}{5}\beta^4 \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\beta = \left(\frac{r_l}{r_{pl}}\right)^2$ . Подстановка (25) в (24) позволяет получить

$$\sigma_z(x, y, 0) = \frac{r_l}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} (r_{pl})^{2p} P_p((r_l / r_{pl})^2) I_p, \quad (26)$$

где

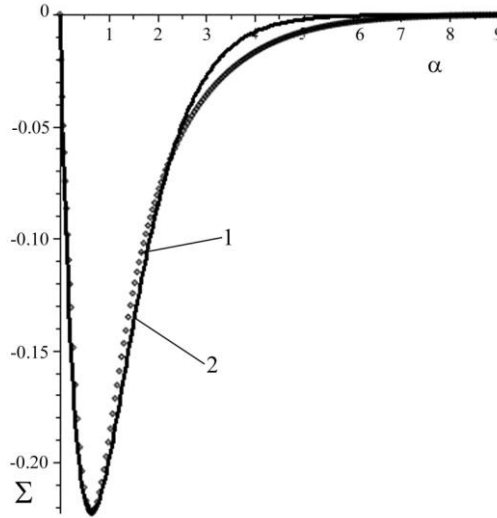
$$I_p = \frac{1}{h^{2p+2}} \int_0^{\infty} \alpha^{2p+1} \Sigma_{ss}(\alpha) d\alpha. \quad (27)$$

Таким образом, вся процедура нахождения нормального напряжения на границе слоев сводится к интегрированию (27).

Можно получить приближенное выражение для  $\Sigma_{ss}(\alpha)$  в виде

$$\Sigma_{ss}(\alpha) \approx \Sigma_p(\alpha) = \Sigma_{\max} \alpha / \alpha_{\max} \exp(1 - \alpha / \alpha_{\max}), \quad (28)$$

где  $\alpha_{\max}$  - значение аргумента, при котором  $\Sigma_{ss}(\alpha)$  достигает экстремума, при этом  $\Sigma_{ss}(\alpha_{\max}) = \Sigma_{\max}$ . На рис. 2 показаны зависимости  $\Sigma_{ss}(\alpha), \Sigma_p(\alpha)$ , из которых видно хорошая аппроксимация сложной функции  $\Sigma_{ss}(\alpha)$  простой  $\Sigma_p(\alpha)$ .



**Рис. 2.** Аппроксимация трансформанты  $\Sigma_{ss}(\alpha)$  (кривая 1) функцией  $\Sigma_p(\alpha)$  (кривая 2).

Аналогичный подход используют многие исследователи, начиная с пионерской работы Снеддона [32]. Тогда (28) примет вид

$$I_p = e \Sigma_{\max} \left( \frac{\alpha_{\max}}{h} \right)^{2p+2} (2p+2)! \quad (29)$$

Действие от  $l$ -той нагрузки приводит к нормальным напряжениям в интерфейсе, для которых

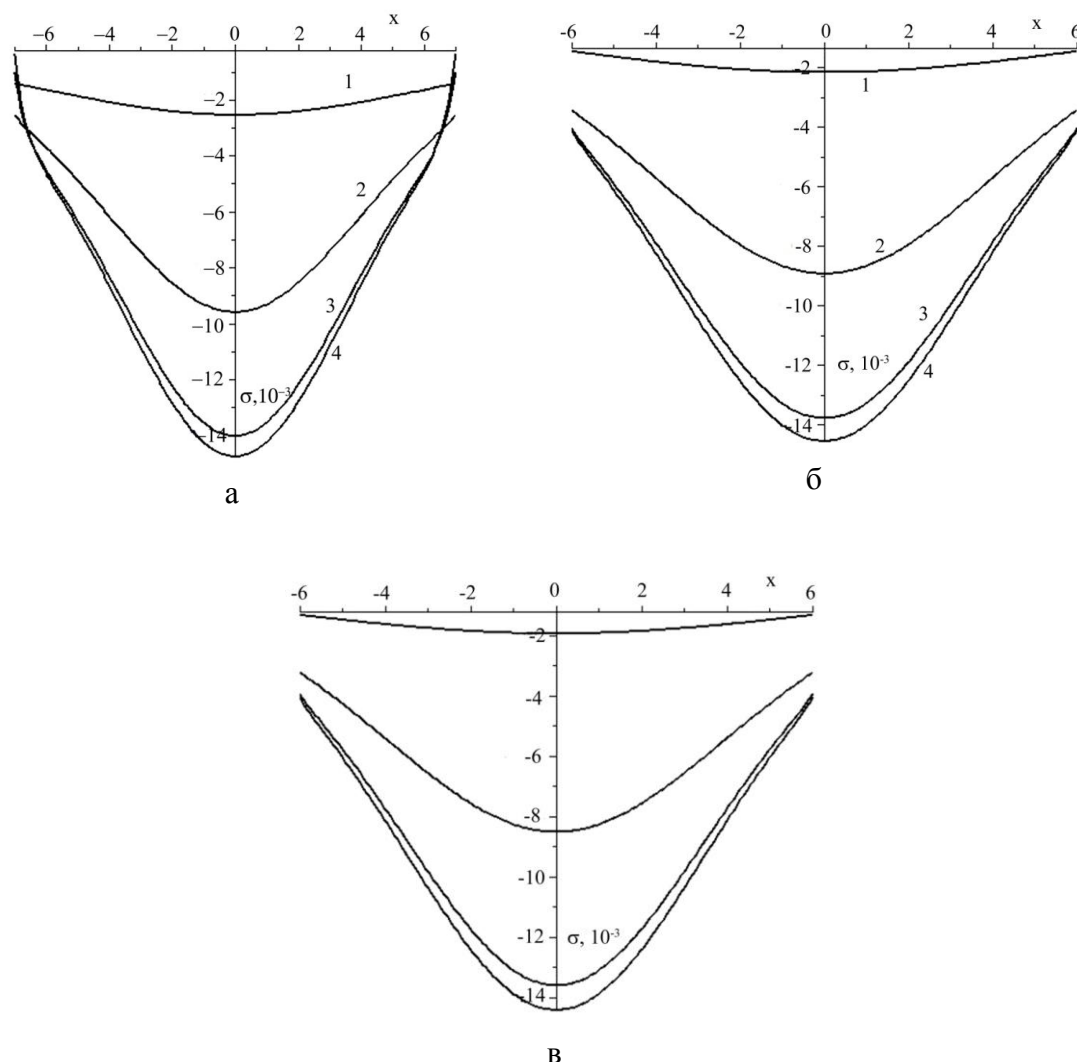
$$\sigma_z(x, y, 0) = \frac{r_l e \Sigma_{\max}}{2} \left( \frac{\alpha_{\max}}{h} \right)^2 \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p (2p+2)!}{4^p (p!)^2} \left( \frac{r_{pl} \alpha_{\max}}{h} \right)^{2p} P_p((\beta)). \quad (30)$$

## 7. Результаты расчетов и их обсуждение

Рассмотрим случай  $x_l = 0, y_l = 0$ . На рис. 3 а приведены зависимости напряжения  $\sigma_z$  на границе слое от координаты  $x$  при значениях  $v_1 = 0.33, v_2 = 0.45$ . Видно, что вне



зависимости от отношения модулей сдвига значения напряжения принимают отрицательное значение. По мере удаления от области приложения нагрузки значение сжимающих напряжений идет на спад. В случае мягких покрытий (Рис. 3а – в, кривые 2 – 4) значение  $\sigma_{zm}$  увеличивается. Аналогичная ситуация возникает в случае  $\nu_1 = \nu_2$  (рис. 3б) и  $\nu_1 > \nu_2$  (рис. 3в).



**Рис. 3.** Распределение нормальной компоненты тензора напряжений на границе раздела покрытие /подложка (1 –  $B=0.1$ ; 2 –  $B=1$ ; 3 –  $B=10$ ; 4 –  $B=100$ )  
а)  $\nu_1 = 0.33$ ,  $\nu_2 = 0.45$ ; б)  $\nu_1 = \nu_2 = 0.45$ , в)  $\nu_2 = 0.45$ ,  $\nu_1 = 0.33$ .

В случае, если  $x_l \neq 0$ ,  $y_l \neq 0$  аналитический вид кривых практически не изменяется. Разница лишь в том, что максимум нормальных сжимающих напряжений будет приходиться на  $x_l$ ,  $y_l$ .

В таблице 1 приведены данные об изменении максимального значения нормальных напряжений от толщины покрытий при различных значениях отношений модулей сдвига. В качестве примера взят случай  $\nu_1 = 0.33$ ,  $\nu_2 = 0.45$ .

Из данных таблицы следует, что с ростом толщины покрытий значение максимума нормальных напряжений снижается.

Таким образом, следует заключить, что более жесткие покрытия способствуют более равномерному распределению сжимающих напряжений по границе контакта.

Таблица 1. Экстремальные значения напряжений в зоне контакта слоев.

	Нормальное напряжение, $\sigma$ , $10^{-3}$					
$B$	0.01	0.1	0.5	1	10	100
$h$						
4	-1.95	-15.4	-45	-55.6	-80.1	-84.2
6	-0.87	-6.9	-20.9	-25.9	-37.8	-39.7
8	-0.49	-3.96	-11.9	-14.9	-21.7	-22.8
10	-0.3	-2.5	-7.6	-9.6	-14	-14.7
30	-0.03	-0.29	-0.87	-1.1	-1.6	-1.67

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ проекта 15-19-00065).

### Литература

- [1] А.Н. Смирнов, Н.В. Абабков, Э.В. Козлов, Н.А. Конева, Н.А. Попова, М.С. Махалов, А.С. Глинка, С.А. Рябов, М.В. Пимонов, *Градиентные структуры при обработке металлов резанием* (Сибирская издательская группа, Кемерово, 2013).
- [2] V.I. Shymanski, N.N. Cherenda, V.V. Uglov, V.M. Astashynski, N.N. Koval, Y.F. Ivanov // *High Temperature Material Processes* **17** (2013) 101.
- [3] V.V. Uglov, N.N. Koval', Yu.F. Ivanov, Yu.A. Petukhov, A.V. Kalin, A.D. Teresov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7(2)** (2013) 248.
- [4] Yilbas, Bekir Sami, Shuja, Shahzada Zaman, *Laser Surface Processing and Model Studies* (Springer, Berlin, 2013).
- [5] Э.В. Козлов, Н.А. Попова, Е.Л. Никоненко, Н.Р. Сизоненко, Н.А. Конева // *Деформация и разрушение материалов* **3** (2016) 10.
- [6] А.М. Глезер // *Успехи физических наук* **182** (2012) 559.
- [7] Yu. Ivanisenko, W. Lojkowski, R.Z. Valiev, H.-J. Fecht // *Acta Materialia* **51** (2003) 5555.
- [8] S. Tarasov, V. Rubtsov, A. Kolubaev // *Wear* **268** (2010) 59.
- [9] W. Lojkowski, Y. Millman, S.I. Chugunova, I.V. Goncharova, M. Djahanbakhsh, G. Bürkle, H.-J. Fecht // *Materials Science and Engineering A* **303** (2003) 209.
- [10] Yu. Ivanisenko, H.J. Fecht // *Steel Tech* **3** (2008) 19.
- [11] V.A. Grishunin, V.E. Gromov, Yu.F. Ivanov, A.D. Teresov, S.V. Konovalov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7(5)** (2013) 990.
- [12] Е.А. Budovskikh, V.E. Gromov, D.A. Romanov // *Doklady Physics* **58** (2013) 82.
- [13] *Современные тенденции модифицирования структуры и свойств материалов*, под ред. Н.Н. Коваля и В.Е. Громова (НТЛ, Томск, 2015).
- [14] В.М. Александров, М.И. Чебаков, *Аналитические методы в контактных задачах теории упругости* (Физматлит, М, 2004).
- [15] В.М. Александров, С.М. Мхитарян, *Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками* (Наука, М, 1987).
- [16] С.М. Айзикович, А.С. Васильев // *Прикладная математика и механика*. **77** (2013) 129.
- [17] V.B. Zelentsov, B.I. Mitrin, S.M. Aizikovich, L.L. Ke // *Materials Physics and Mechanics* **23** (2015) 14.
- [18] S. Forest, E.C. Aifantis // *International Journal of Solids and Structures* **47** (2010) 3367.
- [19] N.H. Zhang, W.L. Meng, E.C. Aifantis // *Composite Structures* **93** (2011) 3130.
- [20] Ю.А. Шевляков, *Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред* (Вища школа, Киев, Одесса, 1977).

- [21] Л.А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах* (Наука, М, 1984).
- [22] V.D. Sarychev, S.A. Nevskii, V.E. Gromov // *Materials Physics and Mechanics* **22** (2015) 157.
- [23] M. Ameri, M. Malakouti, P. Malekzadeh // *Mechanics of Time-Dependent Materials* **18** (2014) 275.
- [24] K. Holmberg, A. Laukkanen, A. Ghabchi, M. Rombouts, E. Turunen, R. Waudby, T. Suhonen, K. Valtonen, E. Sarlin // *Tribology International* **72** (2014) 13.
- [25] Ю.И. Димитриенко, Н.Н. Федонюк, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков, А.А. Прозоровский // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана* **7** (2014) 243.
- [26] В.М. Александров, Д.А. Пожарский, *Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел* (Факториал, М, 1998).
- [27] И.Г. Горячева, Ф.И. Степанов, Е.В. Торская // *Прикладная математика и механика* **79** (2015) 853.
- [28] Е.В. Торская // *Известия РАН. Механика твердого тела* **6** (2011) 122.
- [29] И.Г. Горячева, С.М. Захаров, А.П. Краснов, А.С. Юдин, Е.В. Торская, Д.П. Марков, И.А. Жаров // *Трение и износ* **34** (2013) 547.
- [30] D.M. Burmister // *Journal of Applied Physics* **16** (1945) 89.
- [31] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (ГИФМЛ, М., 1964).
- [32] И. Снеддон, Д. Берри, *Классическая теория упругости* (ГИФМЛ, М, 1961).

## ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF SURFACE LAYERS OF THE SURFACING MATERIAL RATE AT THE CONTACT LOADS

V.D. Sarychev, S.A. Nevsky\*, V.E. Gromov

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, 654007, Russia

\*e-mail: nevskiy.sergei@yandex.ru

**Abstract.** The analysis of stress-strain state on the border "of the deposited surface layer – substrate" methods of the theory of elasticity of inhomogeneous media, when exposed to distributed in a circle of the load. The solution of spatial tasks in the form of a series containing hypergeometric function. The dependences of maximum values of stresses from the linear dimensions of the deposited material. It is shown that the creation of brutal coverage plays a favorable role, reducing the maximum normal stress.

**Acknowledgement.** The study was performed by a grant from the Russian Science Foundation (Project № 15-19-00065).

### References

- [1] A.N. Smirnov, N.V. Ababkov, E.V. Kozlov, N.A. Koneva, N.A. Popova, M.S. Makhalov, A.S. Glinka, S.A. Ryabov, M.V. Pimonov, *Gradient structure at the metal cutting* (Siberian Edition Group, Kemerovo, 2013). (In Russian).
- [2] V.I. Shymanski, N.N. Cherenda, V.V. Uglov, V.M. Astashynski, N.N. Koval, Y.F. Ivanov // *High Temperature Material Processes* **17** (2013) 101.
- [3] V.V. Uglov, N.N. Koval', Yu.F. Ivanov, Yu.A. Petukhov, A.V. Kalin, A.D. Teresov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7**(2) (2013) 248.

- [4] Yilbas, Bekir Sami, Shuja, Shahzada Zaman, *Laser Surface Processing and Model Studies* (Springer, Berlin, 2013).
- [5] E.V. Kozlov, N.A. Popova, E.L. Nikonenko, N.R. Sizonenko, N.A. Koneva // *Deformation and Fracture of Materials* **3** (2016) 10. (In Russian).
- [6] A.M. Glezer // *Physics-Uspekhi* **55** (2012) 522.
- [7] Yu. Ivanisenko, W. Lojkowski, R.Z. Valiev, H.-J. Fecht // *Acta Materialia* **51** (2003) 5555.
- [8] S. Tarasov, V. Rubtsov, A. Kolubaev // *Wear* **268** (2010) 59.
- [9] W. Lojkowski, Y. Millman, S.I. Chugunova, I.V. Goncharova, M. Djahanbakhsh, G. Bürkle, H.-J. Fecht // *Materials Science and Engineering A* **303** (2003) 209.
- [10] Yu. Ivanisenko, H.J. Fecht // *Steel Tech* **3** (2008) 19.
- [11] V.A. Grishunin, V.E. Gromov, Yu.F. Ivanov, A.D. Teresov, S.V. Konovalov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7(5)** (2013) 990.
- [12] E.A. Budovskikh, V.E. Gromov, D.A. Romanov // *Doklady Physics* **58** (2013) 82.
- [13] *Modern tendency modification of materials structure and properties*, ed. by N.N. Koval and V.E. Gromov (NTL, Tomsk, 2015).
- [14] V.M. Alexandrov, M.I. Chebakov, *Analytical methods for contact problems of elasticity theory* (Fizmatlit, Moscow, 2004). (In Russian).
- [15] V.M. Alexandrov, S.M. Mkhitarian, *Contact problems with thin coatings and layers* (Nauka, Moscow, 1987). (In Russian).
- [16] S.M. Aizikovich, A.S. Vasiliev // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **77** (2013) 91.
- [17] V.B. Zelentsov, B.I. Mitrin, S.M. Aizikovich, L.L. Ke // *Materials Physics and Mechanics* **23** (2015) 14.
- [18] S. Forest, E.C. Aifantis // *International Journal of Solids and Structures* **47** (2010) 3367.
- [19] N.H. Zhang, W.L. Meng, E.C. Aifantis // *Composite Structures* **93** (2011) 3130.
- [20] Yu.A. Shevlyakov, *Matrix algorithms in the theory of elasticity of inhomogeneous media* (Visha Scola, Kiev, Odessa, 1977). (In Russian).
- [21] L.A. Molotkov, *Matrix method in the theory of wave propagation in layered elastic and liquid media* (Nauka, Moscow, 1984). (In Russian).
- [22] V.D. Sarychev, S.A. Nevskii, V.E. Gromov // *Materials Physics and Mechanics* **22** (2015) 157.
- [23] M. Ameri, M. Malakouti, P. Malekzadeh // *Mechanics of Time-Dependent Materials* **18** (2014) 275.
- [24] K. Holmberg, A. Laukkanen, A. Ghabchi, M. Rombouts, E. Turunen, R. Waudby, T. Suhonen, K. Valtonen, E. Sarlin // *Tribology International*, **72** (2014) 13.
- [25] Yu.I. Dimitrienko, N.N. Fedonyuk, E.A. Gubareva, S.V. Sborshikov, A.A. Prozorovskii // *Science and education: scientific edition of Bauman MSTU* **7** (2014) 243.
- [26] V.M. Alexandrov, D.A. Pozharskii, *Non-classical three-dimensional problems of contact mechanics of elastic states* (Factorial, Moscow, 1998). (In Russian).
- [27] I.G. Goryacheva, F.I. Stepanov, E.V. Torskaya // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **79** (2015) 853.
- [28] E.V. Torskaya // *Mechanics of Solids* **46** (2011) 913.
- [29] I.G. Goryacheva, S.M. Zakharov, A.P. Krasnov, A.S. Yudin, E.V. Torskaya, D.P. Markov, I.A. Zharov // *Journal of Friction and Wear* **34** (2013) 415.
- [30] D.M. Burmister // *Journal of Applied Physics* **16** (1945) 89.
- [31] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums, series and productions* (GIFML, Moscow, 1964). (In Russian).
- [32] I. Sneddon, D. Berry, *The Classical Theory of Elasticity* (GIFML, Moscow, 1961).