

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ НАПЛАВЛЕННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ КОНТАКТНЫХ НАГРУЗКАХ

В.Д. Сарычев, С.А. Невский*, В.Е. Громов

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, 654007, Россия

*e-mail: nevskiy.sergei@yandex.ru

Аннотация. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния на границе «наплавленный поверхностный слой – подложка» методами теории упругости неоднородных сред, при воздействии распределенной по кругу нагрузки. Получено решение пространственной задачи в виде ряда, содержащего гипергеометрическую функцию. Получены зависимости максимальных значений напряжений от линейных размеров наплавленного материала. Показано, что создание жесткого покрытия играет благоприятную роль, уменьшая максимум нормального напряжения.

1. Введение

Известно, что различные внешние воздействия приводят к тому, что структура, фазовый состав и дефектная субструктура материалов становятся неоднородными по глубине [1]. К числу таких воздействий относятся концентрированные потоки энергии [2 – 4], большие пластические деформации [5 – 8] и процессы длительной эксплуатации, например, рельсов [9, 10]. Нарушение однородности материалов, путем образования резких переходных слоев, приводит к тому, что на их границах образуются микротрещины. Их наличие приводит к снижению усталостной долговечности [11], износостойкости, твердости [12] и других характеристик. С другой стороны, наличие градиентных структур способствует увеличению эксплуатационных свойств изделий [13]. В этой связи исследование напряженно-деформированного состояния материалов с градиентной структурой с целью поиска оптимальных режимов обработки является актуальной задачей.

В настоящее время предложено большое число методов расчета напряженно-деформированного состояния неоднородных сред. Эти методы условно можно разделить на три группы: аналитические, численные и численно-аналитические. Для аналитических методов характерно то, что в них учитывается относительная толщина покрытия. Это позволяет привлекать асимптотические разложения. В результате получаются удобные для исследования выражения. В этом направлении следует отметить работы [14, 15], где асимптотические методы применялись для решения различного спектра задач. В [16, 17] эти методы были обобщены на материалы с градиентом механических свойств. Недостатком подхода [14 – 17] является необходимость решения парных интегральных уравнений, при этом расчеты зависимостей полей напряжений в расчетной области носят иллюстративный характер, и нет анализа особенностей их распределений, а основной упор делается на расчетах ширины и глубины зоны контакта и характера распределений контактных напряжений.

В качестве альтернативы этому подходу можно предложить градиентную теорию упругости [18, 19]. Основной идеей этой теории является введение в обобщенный закон Гука дополнительных членов, учитывающих градиент механических свойств, однако коэффициенты при этих членах являются подгоночными и чаще всего трудно определить их физический смысл. В работах [20, 21] предлагается матричный метод решения задач теории упругости неоднородных сред. Его суть заключается в том, что связь между условиями на границах слоев задается матрицами перехода. После ее построения используются рекуррентные формулы для расчета вектора первого (начального) слоя, включающего продольные и поперечные смещения, а также нормальные и касательные напряжения [20]. Однако в случае большого количества слоев эти матрицы становятся громоздкими. Несмотря на данный недостаток, матричные алгоритмы успешно применяются для решения задач о распространении волн в слоисто-неоднородных средах [21], деформационного поведения обработанных низкоэнергетическим сильноточным электронным пучком материалов [22].

Интенсивное развитие вычислительной техники привело к появлению стандартных математических пакетов основанных на методе конечных элементов. Использование этих пакетов требует работы по их адаптации к имеющимся задачам, а также понимания особенностей контактного взаимодействия контртел с покрытиями для подбора адекватной сетки разбиения на элементы. Преимуществом этих методов является возможность исследования трехмерных задач, учет трения в контактных задачах, возможность введения неупругих элементов. К недостаткам следует отнести сложности при исследовании точечного контакта, а также относительно длительное время расчетов. Кроме того, при подобных расчетах невозможно получить адекватное решение при наличии точек или линий концентрации напряжений. Решению трехмерных задач посвящены работы [23 -25]. В [23] проведен квазистатический анализ многослойных металлических конструкций на основе двумерной теории упругости. В результате получено решение в виде рядов Прони с временной добавкой. Применительно к асфальто-бетонным покрытиям позволило проанализировать влияние длительности нагрузки на напряженно-деформированное состояние. В [24] методом конечных элементов решена задача об износе многослойных покрытий нанесенных лазерным методом. В результате было установлено, что такие характеристики рельефа поверхности, как высокая локальная кривизна, насечки, крупные частицы оказывают существенное влияние на износостойкость материалов. В [25] разработана многомасштабная модель трехслойных сотовых конструкций, позволяющая вычислять эффективные упругие и прочностные характеристики сотовых заполнителей и силовых обшивок, а также рассчитывать напряженно-деформированное состояние конструкции в рамках трехмерной теории упругости неоднородных сред. На основе трехмерного конечно-элементного моделирования показано, что при четырехточечном изгибе трехслойной сотовой пластины максимальные значения изгибных и касательных напряжений реализуются в зоне приложения нагрузки и действия опор пластины, причем локальные максимумы напряжений превосходят "балочные" значения изгибающих напряжений и касательных напряжений.

В отличие от аналитических и численных методов численно-аналитические решения контактных задач для слоистых упругих тел не предполагают каких-либо ограничений, налагаемых на относительную толщину либо относительную жесткость покрытий. При этом численные расчеты используются только на конечном этапе решения. В основу этих методов положены интегральные преобразования Фурье и Ханкеля. Основной проблемой этих методов является корректность численного обращения трансформант [26]. Эти методы в последнее время находят применение для решения задач о скольжении гладкого индентора по вязкоупругому основанию [27],

моделированию накопления контактно-усталостных повреждений в двухслойном пространстве при неполном сцеплении слоев [28], эволюции профилей колеса и рельса [29]. В этих работах применялся принцип локализации, который состоит в том, что как дискретные единицы рассматриваются неровности, ближайšie к произвольно выбранной, действие остальных заменяется приложенной распределенной нагрузкой.

Исходя из вышеизложенного сформулируем цель нашей работы – анализ напряженно-деформированного состояния наплавленного материала при контактом нагружении с помощью матричных алгоритмов теории упругости неоднородных сред.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о равновесии полосы, которая занимает область $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-h \leq z \leq h$. Для удобства примем толщину пластины равной $2h$, а плоскость xy проходит через середину пластины (Рисунок 1).

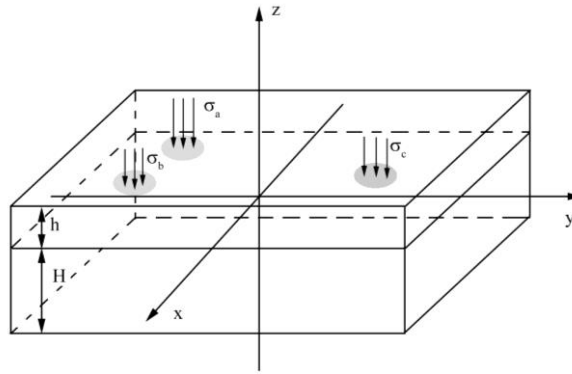


Рис. 1. К постановке задачи, о равновесии упругой полосы сцепленной с полупространством

Уравнения равновесия и обобщенный закон Гука запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (1) \\ \sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Зададим условия на границе слоев:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, y, h) = \sigma_+(x, y), \quad \sigma_{zz}(x, y, -h) = \sigma_-(x, y); \\ \sigma_{xz}(x, y, h) = \tau_{x+}(x, y), \quad \sigma_{xz}(x, y, -h) = \tau_{x-}(x, y); \\ \sigma_{yz}(x, y, h) = \tau_{y+}(x, y), \quad \sigma_{yz}(x, y, -h) = \tau_{y-}(x, y). \quad (2) \end{aligned}$$

Подставим уравнения закона Гука в условие равновесия и применим двумерное преобразование Фурье, в итоге получим

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu)(U'' - n^2U) + k(iW' - (kU + mV)) = 0, \\ (1 - 2\nu)(V'' - n^2V) + m(iW' - (kU + mV)) = 0, \\ (1 - 2\nu)(W'' - n^2W) + W'' + i(kU' + mV') = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

Выразим линейную комбинацию двух первых уравнений (3) и введем обозначение, $F = kU + mV$, $\Phi = mU - kV$, тогда (3) сводится к системе:

$$\frac{d^4 F}{dz^4} - 2n^2 \frac{d^2 F}{dz^2} + n^4 F = 0, \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - n^2 \Phi = 0; \quad (4)$$

$$W = \frac{i}{n^3} \left(2(1-\nu)F''' + (2\nu-3)n^2 F' \right)$$

Общее решение (4) будет иметь вид

$$F(z) = A_1 ch(nz) + B_1 nz sh(nz) + A_2 sh(nz) + B_2 nz ch(nz)$$

$$W(z) = -i(A_1 sh(nz) - (nz ch(nz) + sh(nz)(4\nu-3))B_1 -$$

$$- A_2 ch(nz) - (nz sh(nz) + ch(nz)(4\nu-3))B_2,$$

$$\Phi(z) = C_1 sh(nz) + C_2 ch(nz) \quad (5)$$

Здесь A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные.

Закон Гука и граничные условия(2) в трансформантах Фурье примут вид:

$$\Sigma_{zz} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left((1-\nu)W' + i\nu nF \right), \Sigma_{xz} = \mu(U' + ikW), \Sigma_{yz} = \mu(V' + imW). \quad (6)$$

$$\Sigma_{zz}(\pm h) = \Sigma_{\pm}; \quad \Sigma_{xz}(\pm h) = T_{x\pm}; \quad \Sigma_{yz}(\pm h) = T_{y\pm}.$$

Выразим линейные комбинации Σ_{xz}, Σ_{yz} , в виде $T = k\Sigma_{xz} + m\Sigma_{yz}$ и $T_\Phi = m\Sigma_{xz} - k\Sigma_{yz}$.
Тогда

$$T = \mu n(F' + inW), T_\Phi = \mu n\Phi'. \quad (7)$$

Таким образом трехмерная задача свелась к двум: двумерной с величинами F, W, Σ, T и одномерной с величинами Φ и T_Φ .

3. Связь перемещений и напряжений на границах слоев для конечного слоя

Подставим первое и второе уравнение (5) в (6) и при $z = \pm h$ в получим систему для определения A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\Sigma_1 = 2i(A_1 \mu ch(nh)n - (\mu sh(nh)nz^2 - 2\mu n(1-2\nu)ch(nh))B_1 - A_2 \mu sh(nh)n +$$

$$+ (\mu ch(nh)nz^2 - 2\mu n(1-2\nu)sh(nh))B_2,$$

$$T_1 = 2\mu(A_1 sh(nh)n + B_1(ch(nh)nz^2 - n(1-2\nu)sh(nh))) + A_2 ch(nh)n +$$

$$B_2(sh(nh)nz^2 - n(1-2\nu)ch(nh)), \quad (8)$$

$$\Sigma_2 = 2i(A_1 \mu ch(nh)n + (\mu sh(nh)nz^2 + 2\mu n(1-2\nu)ch(nh))B_1 + A_2 \mu sh(nh)n +$$

$$+ (\mu ch(nh)nz^2 + 2\mu n(1-2\nu)sh(nh))B_2,$$

$$T_2 = 2\mu(-A_1 sh(nh)n + B_1(ch(nh)nz^2 + n(1-2\nu)sh(nh))) + A_2 ch(nh)n +$$

$$+ B_2(-sh(nh)nz^2 - n(1-2\nu)ch(nh)).$$

Решение (8) запишем в виде:

$$A_1 = \frac{1}{4\mu n \Delta} \left(i(nh ch(nh) - (1-2\nu)sh(nh))(\Sigma_1 + \Sigma_2) + (2(1-\nu)ch(nh) - nh sh(nh))(T_1 - T_2) \right),$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_1} \left(-ish(nh)(\Sigma_1 + \Sigma_2) + ch(nh)(T_1 - T_2) \right), \Delta_1 = (sh(nh)ch(nh) + nh), \\
A_2 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_2} \left(i(nsh(nh) - (1-2\nu)ch(nh))(\Sigma_1 - \Sigma_2) + ((2(1-\nu)sh(nh) - nhch(nh)))(T_1 + T_2) \right), \quad (9) \\
B_2 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_2} \left(-ich(nh)(\Sigma_1 - \Sigma_2) + sh(nh)(T_1 + T_2) \right), \Delta_2 = (sh(nh)ch(nh) - nh).
\end{aligned}$$

Подставим (9) в первое и второе уравнение (5) в итоге получим зависимости трансформант перемещений на границах слоя как функции трансформант граничных напряжений:

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_{11}\Sigma_1 + f_{12}\Sigma_2 + f_{13}T_1 + f_{14}T_2; \\
F_2 &= f_{21}\Sigma_1 + f_{22}\Sigma_2 + f_{23}T_1 + f_{24}T_2; \\
W_1 &= w_{11}\Sigma_1 + w_{12}\Sigma_2 + w_{13}T_1 + w_{14}T_2; \\
W_2 &= w_{21}\Sigma_1 + w_{22}\Sigma_2 + w_{23}T_1 + w_{24}T_2;
\end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{i(\alpha^2 + (1-2\nu)sh^2\alpha)}{2n\mu\Delta}, f_{12} = \frac{i\alpha(1-\nu)sh\alpha}{n\mu\Delta}, f_{13} = -\frac{i(1-\nu)(sh2\alpha - 2\alpha)}{2n\mu\Delta}, \\
f_{14} &= \frac{(1-\nu)(sh\alpha - \alpha ch\alpha)}{n\mu\Delta}; f_{21} = \frac{i\alpha(1-\nu)sh\alpha}{n\mu\Delta}, f_{22} = \frac{i(\alpha^2 + (1-2\nu)sh^2\alpha)}{2n\mu\Delta}, \\
f_{23} &= \frac{(1-\nu)(sh\alpha - \alpha ch\alpha)}{n\mu\Delta}, f_{24} = \frac{(1-\nu)(sh2\alpha - 2\alpha)}{2n\mu\Delta}; \\
w_{11} &= \frac{(1-\nu)(sh(2\alpha) + 2\alpha)}{2\mu n\Delta}, w_{12} = -\frac{(1-\nu)(sh(\alpha) + zch(\alpha))}{\mu n\Delta}, w_{13} = \frac{i(\alpha^2 + sh^2(\alpha)(1-2\nu))}{2\mu n\Delta}, \quad (11) \\
w_{14} &= \frac{i\alpha(sh(\alpha)(1-\nu))}{\mu n\Delta}; w_{21} = \frac{(1-\nu)(\alpha ch(\alpha) + sh(\alpha))}{\mu n\Delta}, w_{22} = -\frac{(1-\nu)(sh(2\alpha) + 2\alpha)}{2\mu n\Delta}, \\
w_{23} &= \frac{iz(sh(\alpha)(1-\nu))}{\mu n\Delta}, w_{24} = \frac{i(\alpha^2 + sh^2(\alpha)(1-2\nu))}{2\mu n\Delta}; \\
\Delta &= \Delta_1\Delta_2 = sh^2(\alpha) - \alpha^2, \alpha = nh
\end{aligned}$$

Формулы (10, 11) будут использоваться ниже, для формулировки сопряженной задачи.

4. Граничная задача для полупространства

Пусть полупространство занимает область $z < 0$. Воспользуемся формулами (10, 11), считая, что

$$F_{I_\infty} = F(0), W_{\infty I} = W(0), \Sigma_{I_\infty} = \Sigma(0), T_{I_\infty} = T(0), F_2 = W_2 = \Sigma_2 = T_2 = 0. \quad (12)$$

Тогда выражения для смещений при $z = 0$ выражается через напряжения по формулам

$$\begin{aligned}
F_{I_\infty} &= f_{11\infty}\Sigma_{I_\infty} + f_{13\infty}T_{I_\infty}, W_{I_\infty} = w_{11\infty}\Sigma_{I_\infty} + w_{13\infty}T_{I_\infty}, \\
f_{11\infty} &= \lim_{h \rightarrow \infty} f_{11}, f_{13\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} f_{13}, w_{11\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} w_{11}, w_{13\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} w_{13}.
\end{aligned} \quad (13)$$

Необходимо отметить, что коэффициент Пуассона и модуль сдвига отличаются от аналогичных величин для слоев.

5. Сопряженная задача слоя и полупространства

Вернемся к Рис. 1 и будем считать, что слой толщины h с упругими характеристиками (μ_1, ν_1) расположен на полупространстве (μ_2, ν_2) . На границе сопряжения выполнены условия равенства напряжений и смещений

$$F_{2s} = F_{1\infty}, W_{2s} = W_{1\infty}, \Sigma_{2s} = \Sigma_{1\infty} = \Sigma, T_{2s} = T_{1\infty} = T. \quad (14)$$

Используем (10) и (13) для получения системы для контактных напряжений Σ, T .

$$\begin{aligned} f_{21}\Sigma_1 + f_{22}\Sigma + f_{23}T_1 + f_{24}T &= f_{11\infty}\Sigma + f_{13\infty}T, \\ w_{21}\Sigma_1 + w_{22}\Sigma + w_{23}T_1 + w_{24}T &= w_{11\infty}\Sigma + w_{13\infty}T. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение системы (15)

$$\Sigma = \Sigma_{ss} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_{st} \cdot T_1; T = T_{ts} \cdot \Sigma_1 + T_{ss} \cdot T_1. \quad (16)$$

Выражения $\Sigma_{ss}, \Sigma_{st}, T_{ts}, T_{ss}$ и Σ_1, T_1 полностью определяют напряжения на линии контакта.

Выпишем $\Sigma_{ss}, \Sigma_{st}, T_{ts}, T_{ss}$ в преобразованном виде

$$\begin{aligned} \Sigma_{ss} &= -\frac{1}{2} \frac{(((2(1-\alpha)L - 1 + 2\alpha)K - L) \exp(-\alpha) - (2(1-\alpha) + L + (1+2z)K) \exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL \exp(-2\alpha)}, \\ \Sigma_{st} &= \frac{1}{2} \frac{(((2\alpha(L-1) - 1)K + L) \exp(-\alpha) - (2\alpha + (1-2\alpha)K - L) \exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL \exp(-2\alpha)}, \\ T_{ts} &= -\frac{1}{2} \frac{(((2\alpha(L-1) - 1)K + L) \exp(-\alpha) - (2\alpha + (1-2\alpha)K - L) \exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL \exp(-2\alpha)}, \\ T_{ss} &= \frac{1}{2} \frac{(((2(1+\alpha)L - 1 - 2\alpha)K - L) \exp(-\alpha) - (2(1-\alpha) - L - (1-2z)K) \exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL \exp(-2\alpha)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\alpha = nh$$

$$B = \frac{\mu_2}{\mu_1}, K = \frac{1-B}{1+B(3-4\nu_1)}, L = \frac{(3-4\nu_2) - B(3-4\nu_1)}{(3-4\nu_2) + B}$$

где $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$ – модули упругости и коэффициенты Пуассона покрытия и подложки соответственно.

Выражения (17) и безразмерные переменные (18) впервые были получены в [30] для осесимметричного случая. В нашей трехмерной задаче эти выражения появляются естественным образом. Так как касательные напряжения на границе слоя и штампа возникают благодаря силе трения, то они выражаются через нормальное напряжение, поэтому выпишем только трансформанту Фурье Σ_1 . Для этого представим двумерное преобразование Фурье напряжений при $z = h$

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma(k, m, h) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z(x, y, h) \exp(-i(kx + my)) dx dy. \quad (18)$$

Будем считать, что нормальные напряжения распределены равномерно с постоянным значением напряжения σ_i по кругам D_i , центры которых расположены в

точках с координатами x_l, y_l , радиусами r_l , где l номер круга, L – количество кругов. Значит, нормальные напряжения при $z = h$ можно записать в виде:

$$\sigma_z(x, y, h) = \sum_{l=1}^L \sigma_l \Omega(x, y, x_l, y_l). \quad (19)$$

Здесь $\Omega(x, y, x_l, y_l)$ носитель D_l , т.е. $\Omega(x, y, x_l, y_l) = 1$, $\Omega(x, y, x_l, y_l) = 0$, $(x, y) \notin D_l$.

Пусть область D круг в плоскости (x, y) с центром в точке x_l, y_l и радиусом r_l . Тогда интеграл, входящий в (18) можно выразить

$$S_l = \sigma_l \iint_{D_l} \exp(-i(kx + my)) dx dy = \sigma_l \exp(-i(kx_l + my_l)) \frac{J_1(r_l n)}{n}. \quad (20)$$

Тогда трансформанту нормальных напряжений можно задать по формуле

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2\pi n} \sum_{l=1}^L \sigma_l J_1(r_l n) \exp(-i(kx_l + my_l)). \quad (21)$$

6. Обратное преобразование Фурье

Используя (17) и (21) можно записать трансформанту нормальных напряжений на контакте слоев. Представим схему нахождения обратного преобразования Фурье на примере одного слагаемого из (21).

$$\Sigma = \Sigma_{ss} \cdot J_1(r_l n) \exp(-i(kx_l + my_l)). \quad (22)$$

Тогда обратное преобразование Фурье выражается по формуле

$$\sigma_z(x, y, 0) = \int_0^{\infty} \Sigma_{ss} (nh) J_1(r_l n) J_0(r_{pl} n) dn, \quad (23)$$

где $r_{pl} = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}$.

Для нахождения интеграла в (23) представим произведение функций Бесселя в виде ряда [31]

$$J_0(\tilde{r}_l n) J_1(r_l n) = \frac{nr_l}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p n^{2p}}{4^p (p!)^2} (r_{pl})^{2p} F(-p, -p; 2; (r_l / r_{pl})^2). \quad (24)$$

Здесь $F(-p, -p; 2; \beta)$ – гипергеометрическая функция, которая выражается через полиномы степени p :

$$\begin{aligned} P_0(\beta) &= 1, P_1(\beta) = 1 + \frac{1}{2}\beta, P_2(\beta) = 1 + 2\beta + \frac{1}{3}\beta^2 \\ P_3(\beta) &= 1 + \frac{9}{2}\beta + 3\beta^2 + \frac{1}{4}\beta^3, P_4(\beta) = 4\beta^3 + 12\beta^2 + 8\beta + \frac{1}{5}\beta^4 \end{aligned} \quad (25)$$

где $\beta = \left(\frac{r_l}{r_{pl}}\right)^2$. Подстановка (25) в (24) позволяет получить

$$\sigma_z(x, y, 0) = \frac{r_l}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} (r_{pl})^{2p} P_p((r_l / r_{pl})^2) I_p, \quad (26)$$

где

$$I_p = \frac{1}{h^{2p+2}} \int_0^{\infty} \alpha^{2p+1} \Sigma_{ss}(\alpha) d\alpha. \quad (27)$$

Таким образом, вся процедура нахождения нормального напряжения на границе слоев сводится к интегрированию (27).

Можно получить приближенное выражение для $\Sigma_{ss}(\alpha)$ в виде

$$\Sigma_{ss}(\alpha) \approx \Sigma_p(\alpha) = \Sigma_{\max} \alpha / \alpha_{\max} \exp(1 - \alpha / \alpha_{\max}), \quad (28)$$

где α_{\max} - значение аргумента, при котором $\Sigma_{ss}(\alpha)$ достигает экстремума, при этом $\Sigma_{ss}(\alpha_{\max}) = \Sigma_{\max}$. На рис. 2 показаны зависимости $\Sigma_{ss}(\alpha), \Sigma_p(\alpha)$, из которых видно хорошая аппроксимация сложной функции $\Sigma_{ss}(\alpha)$ простой $\Sigma_p(\alpha)$.

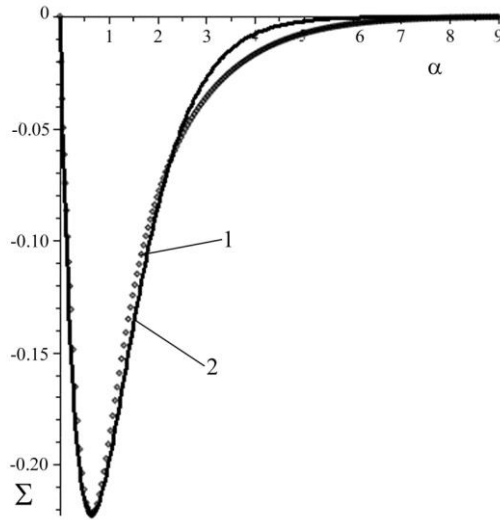


Рис. 2. Аппроксимация трансформанты $\Sigma_{ss}(\alpha)$ (кривая 1) функцией $\Sigma_p(\alpha)$ (кривая 2).

Аналогичный подход используют многие исследователи, начиная с пионерской работы Снеддона [32]. Тогда (28) примет вид

$$I_p = e \Sigma_{\max} \left(\frac{\alpha_{\max}}{h} \right)^{2p+2} (2p+2)! \quad (29)$$

Действие от l -той нагрузки приводит к нормальным напряжениям в интерфейсе, для которых

$$\sigma_z(x, y, 0) = \frac{r_l e \Sigma_{\max}}{2} \left(\frac{\alpha_{\max}}{h} \right)^2 \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p (2p+2)!}{4^p (p!)^2} \left(\frac{r_{pl} \alpha_{\max}}{h} \right)^{2p} P_p((\beta)). \quad (30)$$

7. Результаты расчетов и их обсуждение

Рассмотрим случай $x_l = 0, y_l = 0$. На рис. 3 а приведены зависимости напряжения σ_z на границе слое от координаты x при значениях $\nu_1 = 0.33, \nu_2 = 0.45$. Видно, что вне

зависимости от отношения модулей сдвига значения напряжения принимают отрицательное значение. По мере удаления от области приложения нагрузки значение сжимающих напряжений идет на спад. В случае мягких покрытий (Рис. 3а – в, кривые 2 – 4) значение σ_{zm} увеличивается. Аналогичная ситуация возникает в случае $\nu_1 = \nu_2$ (рис. 3б) и $\nu_1 > \nu_2$ (рис. 3в).

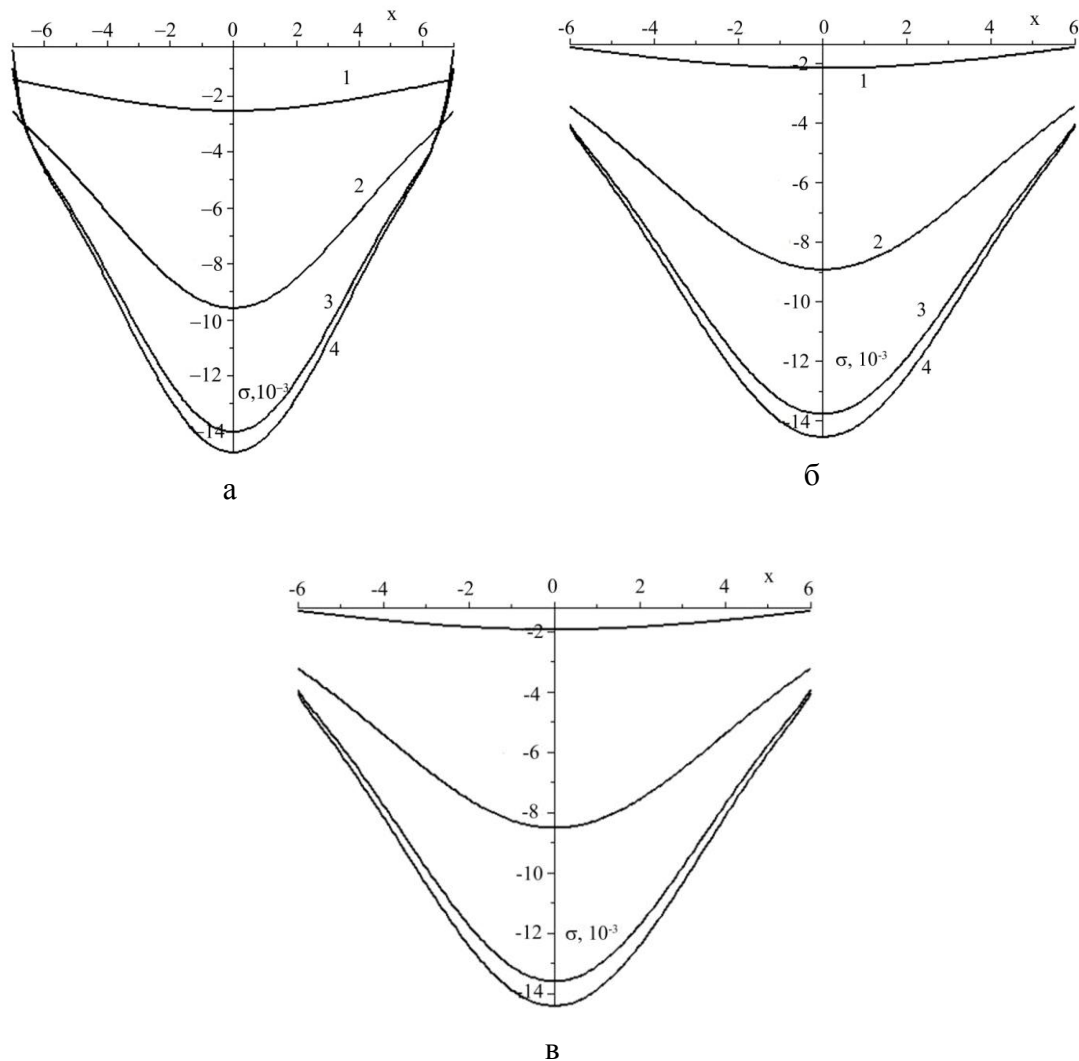


Рис. 3. Распределение нормальной компоненты тензора напряжений на границе раздела покрытие /подложка (1 – $B=0.1$; 2 – $B=1$; 3 – $B=10$; 4 – $B=100$)
а) $\nu_1 = 0.33, \nu_2 = 0.45$; б) $\nu_1 = \nu_2 = 0.45$, в) $\nu_1 = 0.45, \nu_2 = 0.33$.

В случае, если $x_l \neq 0, y_l \neq 0$ аналитический вид кривых практически не изменяется. Разница лишь в том, что максимум нормальных сжимающих напряжений будет приходиться на x_l, y_l .

В таблице 1 приведены данные об изменении максимального значения нормальных напряжений от толщины покрытий при различных значениях отношений модулей сдвига. В качестве примера взят случай $\nu_1 = 0.33, \nu_2 = 0.45$.

Из данных таблицы следует, что с ростом толщины покрытий значение максимума нормальных напряжений снижается.

Таким образом, следует заключить, что более жесткие покрытия способствуют более равномерному распределению сжимающих напряжений по границе контакта.

Таблица 1. Экстремальные значения напряжений в зоне контакта слоев.

	Нормальное напряжение, σ , 10^{-3}					
B	0.01	0.1	0.5	1	10	100
h						
4	-1.95	-15.4	-45	-55.6	-80.1	-84.2
6	-0.87	-6.9	-20.9	-25.9	-37.8	-39.7
8	-0.49	-3.96	-11.9	-14.9	-21.7	-22.8
10	-0.3	-2.5	-7.6	-9.6	-14	-14.7
30	-0.03	-0.29	-0.87	-1.1	-1.6	-1.67

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ проекта 15-19-00065).

Литература

- [1] А.Н. Смирнов, Н.В. Абабков, Э.В. Козлов, Н.А. Конева, Н.А. Попова, М.С. Махалов, А.С. Глинка, С.А. Рябов, М.В. Пимонов, *Градиентные структуры при обработке металлов резанием* (Сибирская издательская группа, Кемерово, 2013).
- [2] V.I. Shymanski, N.N. Cherenda, V.V. Uglov, V.M. Astashynski, N.N. Koval, Y.F. Ivanov // *High Temperature Material Processes* **17** (2013) 101.
- [3] V.V. Uglov, N.N. Koval', Yu.F. Ivanov, Yu.A. Petukhov, A.V. Kalin, A.D. Teresov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7(2)** (2013) 248.
- [4] Yilbas, Bekir Sami, Shuja, Shahzada Zaman, *Laser Surface Processing and Model Studies* (Springer, Berlin, 2013).
- [5] Э.В. Козлов, Н.А. Попова, Е.Л. Никоненко, Н.Р. Сизоненко, Н.А. Конева // *Деформация и разрушение материалов* **3** (2016) 10.
- [6] А.М. Глезер // *Успехи физических наук* **182** (2012) 559.
- [7] Yu. Ivanisenko, W. Lojkowski, R.Z. Valiev, H.-J. Fecht // *Acta Materialia* **51** (2003) 5555.
- [8] S. Tarasov, V. Rubtsov, A. Kolubaev // *Wear* **268** (2010) 59.
- [9] W. Lojkowski, Y. Millman, S.I. Chugunova, I.V. Goncharova, M. Djahanbakhsh, G. Bürkle, H.-J. Fecht // *Materials Science and Engineering A* **303** (2003) 209.
- [10] Yu. Ivanisenko, H.J. Fecht // *Steel Tech* **3** (2008) 19.
- [11] V.A. Grishunin, V.E. Gromov, Yu.F. Ivanov, A.D. Teresov, S.V. Konovalov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7(5)** (2013) 990.
- [12] Е.А. Budovskikh, V.E. Gromov, D.A. Romanov // *Doklady Physics* **58** (2013) 82.
- [13] *Современные тенденции модифицирования структуры и свойств материалов*, под ред. Н.Н. Коваля и В.Е. Громова (НТЛ, Томск, 2015).
- [14] В.М. Александров, М.И. Чебаков, *Аналитические методы в контактных задачах теории упругости* (Физматлит, М, 2004).
- [15] В.М. Александров, С.М. Мхитарян, *Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками* (Наука, М, 1987).
- [16] С.М. Айзикович, А.С. Васильев // *Прикладная математика и механика*. **77** (2013) 129.
- [17] V.B. Zelentsov, B.I. Mitrin, S.M. Aizikovich, L.L. Ke // *Materials Physics and Mechanics* **23** (2015) 14.
- [18] S. Forest, E.C. Aifantis // *International Journal of Solids and Structures* **47** (2010) 3367.
- [19] N.H. Zhang, W.L. Meng, E.C. Aifantis // *Composite Structures* **93** (2011) 3130.
- [20] Ю.А. Шевляков, *Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред* (Вища школа, Киев, Одесса, 1977).

- [21] Л.А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах* (Наука, М, 1984).
- [22] V.D. Sarychev, S.A. Nevskii, V.E. Gromov // *Materials Physics and Mechanics* **22** (2015) 157.
- [23] M. Ameri, M. Malakouti, P. Malekzadeh // *Mechanics of Time-Dependent Materials* **18** (2014) 275.
- [24] K. Holmberg, A. Laukkanen, A. Ghabchi, M. Rombouts, E. Turunen, R. Waudby, T. Suhonen, K. Valtonen, E. Sarlin // *Tribology International* **72** (2014) 13.
- [25] Ю.И. Димитриенко, Н.Н. Федонюк, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков, А.А. Прозоровский // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана* **7** (2014) 243.
- [26] В.М. Александров, Д.А. Пожарский, *Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел* (Факториал, М, 1998).
- [27] И.Г. Горячева, Ф.И. Степанов, Е.В. Торская // *Прикладная математика и механика* **79** (2015) 853.
- [28] Е.В. Торская // *Известия РАН. Механика твердого тела* **6** (2011) 122.
- [29] И.Г. Горячева, С.М. Захаров, А.П. Краснов, А.С. Юдин, Е.В. Торская, Д.П. Марков, И.А. Жаров // *Трение и износ* **34** (2013) 547.
- [30] D.M. Burmister // *Journal of Applied Physics* **16** (1945) 89.
- [31] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (ГИФМЛ, М., 1964).
- [32] И. Снеддон, Д. Берри, *Классическая теория упругости* (ГИФМЛ, М, 1961).

ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF SURFACE LAYERS OF THE SURFACING MATERIAL RATE AT THE CONTACT LOADS

V.D. Sarychev, S.A. Nevsky*, V.E. Gromov

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, 654007, Russia

*e-mail: nevskiy.sergei@yandex.ru

Abstract. The analysis of stress-strain state on the border "of the deposited surface layer – substrate" methods of the theory of elasticity of inhomogeneous media, when exposed to distributed in a circle of the load. The solution of spatial tasks in the form of a series containing hypergeometric function. The dependences of maximum values of stresses from the linear dimensions of the deposited material. It is shown that the creation of brutal coverage plays a favorable role, reducing the maximum normal stress.

Acknowledgement. The study was performed by a grant from the Russian Science Foundation (Project № 15-19-00065).

References

- [1] A.N. Smirnov, N.V. Ababkov, E.V. Kozlov, N.A. Koneva, N.A. Popova, M.S. Makhalov, A.S. Glinka, S.A. Ryabov, M.V. Pimonov, *Gradient structure at the metal cutting* (Siberian Edition Group, Kemerovo, 2013). (In Russian).
- [2] V.I. Shymanski, N.N. Cherenda, V.V. Uglov, V.M. Astashynski, N.N. Koval, Y.F. Ivanov // *High Temperature Material Processes* **17** (2013) 101.
- [3] V.V. Uglov, N.N. Koval', Yu.F. Ivanov, Yu.A. Petukhov, A.V. Kalin, A.D. Teresov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7**(2) (2013) 248.

- [4] Yilbas, Bekir Sami, Shuja, Shahzada Zaman, *Laser Surface Processing and Model Studies* (Springer, Berlin, 2013).
- [5] E.V. Kozlov, N.A. Popova, E.L. Nikonenko, N.R. Sizonenko, N.A. Koneva // *Deformation and Fracture of Materials* **3** (2016) 10. (In Russian).
- [6] A.M. Glezer // *Physics-Uspexhi* **55** (2012) 522.
- [7] Yu. Ivanisenko, W. Lojkowski, R.Z. Valiev, H.-J. Fecht // *Acta Materialia* **51** (2003) 5555.
- [8] S. Tarasov, V. Rubtsov, A. Kolubaev // *Wear* **268** (2010) 59.
- [9] W. Lojkowski, Y. Millman, S.I. Chugunova, I.V. Goncharova, M. Djahanbakhsh, G. Bürkle, H.-J. Fecht // *Materials Science and Engineering A* **303** (2003) 209.
- [10] Yu. Ivanisenko, H.J. Fecht // *Steel Tech* **3** (2008) 19.
- [11] V.A. Grishunin, V.E. Gromov, Yu.F. Ivanov, A.D. Teresov, S.V. Konovalov // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques* **7(5)** (2013) 990.
- [12] E.A. Budovskikh, V.E. Gromov, D.A. Romanov // *Doklady Physics* **58** (2013) 82.
- [13] *Modern tendency modification of materials structure and properties*, ed. by N.N. Koval and V.E. Gromov (NTL, Tomsk, 2015).
- [14] V.M. Alexandrov, M.I. Chebakov, *Analytical methods for contact problems of elasticity theory* (Fizmatlit, Moscow, 2004). (In Russian).
- [15] V.M. Alexandrov, S.M. Mkhitarian, *Contact problems with thin coatings and layers* (Nauka, Moscow, 1987). (In Russian).
- [16] S.M. Aizikovich, A.S. Vasiliev // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **77** (2013) 91.
- [17] V.B. Zelentsov, B.I. Mitrin, S.M. Aizikovich, L.L. Ke // *Materials Physics and Mechanics* **23** (2015) 14.
- [18] S. Forest, E.C. Aifantis // *International Journal of Solids and Structures* **47** (2010) 3367.
- [19] N.H. Zhang, W.L. Meng, E.C. Aifantis // *Composite Structures* **93** (2011) 3130.
- [20] Yu.A. Shevlyakov, *Matrix algorithms in the theory of elasticity of inhomogeneous media* (Visha Scola, Kiev, Odessa, 1977). (In Russian).
- [21] L.A. Molotkov, *Matrix method in the theory of wave propagation in layered elastic and liquid media* (Nauka, Moscow, 1984). (In Russian).
- [22] V.D. Sarychev, S.A. Nevskii, V.E. Gromov // *Materials Physics and Mechanics* **22** (2015) 157.
- [23] M. Ameri, M. Malakouti, P. Malekzadeh // *Mechanics of Time-Dependent Materials* **18** (2014) 275.
- [24] K. Holmberg, A. Laukkanen, A. Ghabchi, M. Rombouts, E. Turunen, R. Waudby, T. Suhonen, K. Valtonen, E. Sarlin // *Tribology International*, **72** (2014) 13.
- [25] Yu.I. Dimitrienko, N.N. Fedonyuk, E.A. Gubareva, S.V. Sborshikov, A.A. Prozorovskii // *Science and education: scientific edition of Bauman MSTU* **7** (2014) 243.
- [26] V.M. Alexandrov, D.A. Pozharskii, *Non-classical three-dimensional problems of contact mechanics of elastic states* (Factorial, Moscow, 1998). (In Russian).
- [27] I.G. Goryacheva, F.I. Stepanov, E.V. Torskaya // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **79** (2015) 853.
- [28] E.V. Torskaya // *Mechanics of Solids* **46** (2011) 913.
- [29] I.G. Goryacheva, S.M. Zakharov, A.P. Krasnov, A.S. Yudin, E.V. Torskaya, D.P. Markov, I.A. Zharov // *Journal of Friction and Wear* **34** (2013) 415.
- [30] D.M. Burmister // *Journal of Applied Physics* **16** (1945) 89.
- [31] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums, series and productions* (GIFML, Moscow, 1964). (In Russian).
- [32] I. Sneddon, D. Berry, *The Classical Theory of Elasticity* (GIFML, Moscow, 1961).