

НЕЛИНЕЙНЫЕ УПРУГИЕ СВОЙСТВА РЕЗИНОКОРДНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Алексей Евдокимов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им.

А.А. Благодатова Российской академии наук (ИМАШ РАН)

101990 г. Москва, Малый Харитоньевский пер. 4

e-mail: a_evdo@mail.ru

Аннотация. В статье представлены результаты исследования нелинейных упругих свойств резинокордных оболочек в режиме статического нагружения. Предложен метод определения нелинейных свойств. Полученные при этом аппроксимации удовлетворительно описывают результаты экспериментов.

Ключевые слова: демпфирующая способность, петли гистерезиса, коэффициенты нелинейности, тензор напряжений, тангенциальная матрица

1. Введение

Многослойные резиноподобные элементы конструкций отличаются свойствами нелинейности и большими упругими деформациями [1-4]. Расчёт таких изделий связан с большими математическими трудностями [5]. Поэтому в большинстве случаев нелинейные задачи стараются свести к линейным задачам [6-8]. Однако это в большой степени влияет на точность полученных результатов. В данной статье рассмотрен вывод коэффициентов нелинейности на примере многослойных оболочек вращения и обосновано введение этих коэффициентов в расчётные зависимости.

Резинокордные оболочки (РКО) с соответствующими физико-механическими характеристиками определяют их демпфирующую способность, которая оценивается коэффициентом диссипации энергии колебаний [9-13]. Результаты экспериментальных исследований демпфирующей способности принято представлять графически в виде петель гистерезиса, площадь которых определяет количество поглощаемой энергии колебаний и выделяемого при этом тепла исследуемого упругого элемента. Кривые деформирования РКО показывают ярко выраженный нелинейный характер механических свойств резинокордной оболочки.

Результаты теоретических исследований эксплуатационных свойств резинокордных оболочек, полученные без учёта конкретных экспериментальных данных о параметрах их нелинейности, имеют существенные отклонения расчётных значений от экспериментальных [14,15]. Это создаёт определённые трудности при проектировании изделий. В значительной степени эти различия проявляются при вибрациях и реверсировании нагрузок.

Поскольку процесс «нагрузка-разгрузка» един и неразрывен, хотя и двухстадиен, то все параметры и характер второй стадии должны определяться первой стадией при неизменном температурно-скоростном режиме в течение всего процесса. Если последнее условие не выполнено, то отклонения от него должны влиять на результаты испытаний и учитываться при их анализе. При достаточно низкой скорости разгрузки

эффект упругого последствия практически исчезает. Он возрастает с ростом скорости нагружения.

2. Коэффициенты нелинейности

Динамическое уравнение состояния для вязкоупругих тел можно представить в дифференциально-операторной форме [16]

$$P_0 \sigma_{ij}(t) + P_1 d_t \sigma_{ij}(t) + P_2 d_{tt}^2 \sigma_{ij}(t) + \dots = q_0 \varepsilon_{ij}(t) + q_1 d_t \varepsilon_{ij}(t) + q_2 d_{tt}^2 \varepsilon_{ij}(t) + \dots,$$

где P_l , q_l – инвариантные (для изотропных тел) функции компонент напряжений $\sigma_{ij}(t)$ и деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$, а также параметров механических свойств; $l = 0; 1; 2; \dots, t$ – время; $d_t \sigma_{ij}$ и $d_t \varepsilon_{ij}$ – скорости нагружения и деформирования.

При статическом нагружении все производные исчезающе малы, и статическое напряжённо-деформированное состояние определяется соотношением $P_0 \sigma_{ij}(t) = q_0 \varepsilon_{ij}(t)$, где $i, j = 1, 2, 3$.

Известно, что при достаточно низких скоростях разгрузки петли гистерезиса с достаточной для технических целей удовлетворительностью вписываются в трапецию или параллелограмм [13,17]. Это явилось предпосылкой выдвижения гипотезы о гистерезисе в параллелограмме, разгрузочная половина которого конгруэнтна нагрузочной. Проверка этой гипотезы при исследовании нелинейности резинокордных оболочек и сравнение полученных теоретических и экспериментальных результатов исследований представляет существенный интерес для дальнейших прикладных и теоретических исследований.

Объектом исследований являлась торовая резинокордная оболочка вращения ЭМ320×80. Экспериментальные исследования выполняли при нагружении оболочек [18] статическим крутящим моментом со скоростью деформирования $3.5 \cdot 10^{-4}$ рад/с, а также поперечной перерезывающей и осевой сжимающей силой со скоростью перемещения $\sim 1 \cdot 10^{-2}$ мм/с. По результатам были построены петли гистерезиса, полученные при испытаниях на кручение (Рис. 1, а), на сдвиг (Рис. 1, б) и на сжатие (Рис. 1, в).

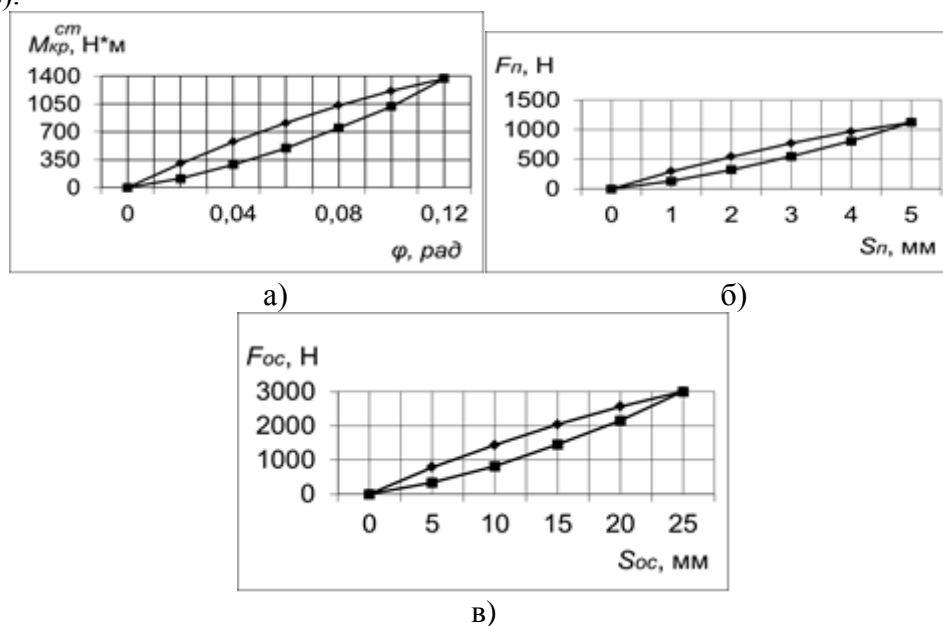


Рис. 1. Петли гистерезиса резинокордной оболочки при нагружении: а) статическим крутящим моментом, б) поперечной сдвигающей силой, в) осевой сжимающей силой

Примем гипотезу об аддитивности деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v,$$

где $\varepsilon, \varepsilon^e, \varepsilon^v$ – деформации – полная, мгновенная и вязкая или нелинейная, причём $\varepsilon^v = -\mu_0 \varepsilon^3 - \nu_0 \varepsilon^5$; μ_0, ν_0 – коэффициенты нелинейности.

Мгновенная деформация равна

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^v = f_0(\varepsilon)/C_0 = \varepsilon + \mu_0 \varepsilon^3 + \nu_0 \varepsilon^5,$$

где C_0 – модуль мгновенной упругости; $f_0(\varepsilon)$ – возрастающая нагрузка.

Вязкая деформация зависит от скорости нагружения таким образом, что эта зависимость исчезает при медленном статическом деформировании, и нелинейная компонента оказывается связанной только с полными деформациями. При достаточно малых скоростях деформирования эффект упругого последствия не проявляется.

Кривая нагружения при закручивании оболочки описывается полиномом пятой степени с нечётными показателями

$$f = f_0(\varepsilon) = C_0 \varepsilon + m_0 \varepsilon^3 + n_0 \varepsilon^5 \text{ при } d_t |f| > 0,$$

где ε – угол закручивания оболочки; $d_t |f|$ – скорость нагружения; $m_0 \equiv \mu_0 C_0$; $n_0 \equiv \nu_0 C_0$. Три параметра кривой нагружения определяются из условий в начале и конце его, т. е. при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_a$, когда имеем

$$f_a = f(\varepsilon_a); \quad f' \Big|_{\varepsilon=0} = C_0; \quad f'_a = C_0 + 3 m_0 \varepsilon_a^2 + 5 n_0 \varepsilon_a^4.$$

Эти условия позволяют составить два уравнения для вычисления коэффициентов m_0, n_0 , т. е.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_a^3; & \varepsilon_a^5 \\ 3 \varepsilon_a^2; & 5 \varepsilon_a^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_0 \\ n_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a - C_0 \varepsilon_a \\ f'_a - C_0 \end{Bmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} m_0 &= \left(\varepsilon_a^{-3} / 2 \right) \left[5 f_a - (f'_a + 4 C_0) \varepsilon_a \right]; \\ n_0 &= (\varepsilon_a^{-5} / 2) \left[\varepsilon_a (2 C_0 + f'_a) - 3 f_a \right]. \end{aligned} \tag{1}$$

Кривая разгрузки описывается аналогично полиномом пятой степени, т. е. $f = f_p(\varepsilon) \equiv C_p \varepsilon + m_p \varepsilon^3 + n_p \varepsilon^5$ при $d_t |f| < 0$.

При этом имеем $f_a = f_0(\varepsilon_a) = f_p(\varepsilon_a)$ – условие неразрывности процесса.

Используя гипотезу о петле гистерезиса внутри параллелограмма, примем

$$C_p = f'_0(\varepsilon_a); \quad f'_p(\varepsilon_a) = C_0,$$

где $C_p = f'_0(\varepsilon_a) = C_0 + 3 m_0 \varepsilon_a^2 + 5 n_0 \varepsilon_a^4$.

В этом случае кривая разгрузки полностью определяется параметрами кривой нагружения. При этом допущении коэффициенты нелинейности кривой разгрузки определяются из системы уравнений

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_a^3; & \varepsilon_a^5 \\ 3 \varepsilon_a^2; & 5 \varepsilon_a^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_p \\ n_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0(\varepsilon_a) - C_p \varepsilon_a \\ C_0 - C_p \end{Bmatrix}.$$

Решив эту систему, получим

$$\begin{aligned} m_p &= \left(\varepsilon_a^{-3} / 2 \right) \left[5 f_a - (C_0 + 4 C_p) \varepsilon_a \right]; \\ n_p &= \left(\varepsilon_a^{-5} / 2 \right) \left[(2 C_p + C_0) \varepsilon_a - 3 f_a \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Иначе уравнения (2) получаются из уравнений (1) путём замены f'_a на C_0 и C_0 на C_p . Используя формулы (1) и (2) были аппроксимированы кривые нагружения и разгрузки резинокордных оболочек. В Таблицах 1-6 приведены результаты испытаний на кручение, сдвиг и сжатие и параметры их аппроксимаций, а также средние значения углов сдвига γ и касательных напряжений τ_k .

Таблица 1. Результаты испытаний оболочки при нагружении статическим крутящим моментом

Закрутка	φ , рад	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12
Момент $f(\varphi)$, Н·м	Эксперим.	304	574	810	1032	1216	1370
	Расч. по (1)	301	584	834	1043	1216	1370
Угол сдвига	$\gamma = \varphi R_c / h$	0.054	0.109	0.163	0.217	0.271	0.326
τ_k , МПа	Экспер.	0.13	0.25	0.35	0.44	0.52	0.59

Примечание. Параметры кривой нагружения: $C_0 = 15.2 \cdot 10^3$ Н·м; $m_0 = -3.9 \cdot 10^5$ Н·м; $n_0 = 9.3 \cdot 10^6$ Н·м.

Таблица 2. Результаты испытаний оболочки при разгрузке от действия статического крутящего момента

Закрутка	φ , рад	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12
Момент $f(\varphi)$, Н·м	Эксперим.	115	290	496	750	1020	1370
	Расч. по (1)	157/42	332/42	538/44	784/34	1067/47	1370/0
	Расч. по (2)	120/+5	247/-43	460/-36	713/-37	1024/4	1370/0

Примечание. Параметры разгрузки: $C_p = 7.7 \cdot 10^3$ Н·м; $m_p = 3.9 \cdot 10^5$ Н·м; $n_p = -8.8 \cdot 10^6$ Н·м вычислены по формуле (1).

Параметры разгрузки: $C_p = 5.7 \cdot 10^3$ Н·м; $m_p = 5.8 \cdot 10^5$ Н·м; $n_p = -1.3 \cdot 10^7$ Н·м вычислены по формуле (2).

Таблица 3. Результаты испытаний оболочки при нагружении поперечной перерезывающей силой

Сдвиг	S , мм	1	2	3	4	5
Сила $f(S)$, Н	эксперим.	294	544	770	966	1122
	расч. по (1)	290	556	782	966	1122
Угол сдвига	$\gamma = S/h$	0.018	0.036	0.053	0.071	0.089
τ_k , МПа	Экспер.	0.019	0.036	0.05	0.063	0.0735

Примечание. Параметры нагружения: $C_0 = 294$ Н·мм; $m_0 = -4.2$ Н/мм³; $n_0 = 0.06$ Н/мм⁵.

Таблица 4. Результаты испытаний оболочки при разгрузке от действия поперечной перерезывающей силой

Сдвиг	S, мм	1	2	3	4	5
Сила $f(S)$, Н	эксперим.	130	322	550	808	1122
	расч. по (1)	161/31	344/22	566/16	831/23	1122/1
	расч. по (2)	136/6	304/-18	526/-24	808/0	1122/1

Примечание. Параметры кривой разгрузки: $C_p = 157 \text{ Н}\cdot\text{мм}$; $m_p = 4 \text{ Н/мм}^3$; $n_p = -0.05 \text{ Н/мм}^5$ вычислены по формуле (1).

Параметры кривой разгрузки: $C_p = 130 \text{ Н}\cdot\text{мм}$; $m_p = 5.76 \text{ Н/мм}^3$; $n_p = -0.08 \text{ Н/мм}^5$ вычислены по формуле (2).

Таблица 5. Результаты испытаний оболочки при нагружении осевой сжимающей силой

Сжатие	S, мм	5	10	15	20	25
Сила $f(S)$, Н	эксперим.	785	1435	2040	2565	3000
	расч. по (1)	774	1483	2084	2572	3000

Примечание. Параметры кривой нагружения: $C_0 = 157 \text{ Н}\cdot\text{мм}$; $m_0 = -0.09 \text{ Н/мм}^3$; $n_0 = 5.3 \cdot 10^{-5} \text{ Н/мм}^5$.

Таблица 6. Результаты испытаний оболочки при разгрузке от действия осевой сжимающей силы

Сжатие	S, мм	5	10	15	20	25
Сила $f(S)$, Н	эксперим.	330	810	1455	2145	3000
	Расч. по (1)	444/114	942/132	1533/78	2229/84	3000/0
	Расч. по (2)	346/16	785/-25	1380/-75	2143/-2	3000/0

Примечание. Параметры кривой разгрузки: $C_p = 87 \text{ Н}\cdot\text{мм}$; $m_p = 0.08 \text{ Н/мм}^3$; $n_p = -3.7 \cdot 10^{-5} \text{ Н/мм}^5$ вычислены по формуле (1).

Параметры кривой разгрузки: $C_p = 66 \text{ Н}\cdot\text{мм}$; $m_p = 0.132 \text{ Н/мм}^3$; $n_p = -7.3 \cdot 10^{-5} \text{ Н/мм}^5$ вычислены по формуле (2).

В первых строках таблиц приведены значения абсолютных деформаций, во вторых строках – экспериментальные значения моментов и сил, в третьих строках расчётные значения нагрузок, вычисленные по формулам (1), а в четвёртых – значения нагрузок, вычисленные по формулам (2). В знаменателях указаны отклонения расчётных значений от экспериментальных. Отклонения расчётных значений от экспериментальных, оцениваемые знаменателями в Таблицах 2, 4 и 6, получаются в большинстве случаев меньше при использовании формул (2), основанных на гипотезе о гистерезисе в параллелограмме.

Увеличение коэффициентов нелинейности механических свойств m_0 и n_0 усиливает демпфирующие свойства РКО, поскольку кривизны функций нагружения и разгрузки зависят только от этих параметров нелинейности, без учёта упругого последствия [19]. Важной характеристикой работоспособности РКО является среднее касательное напряжение в среднем сечении максимального кольца, передающего крутящий момент

$$\tau_c = M_{\max} / (2\pi R_c^2 \delta),$$

где $R_c = 152$ мм – средний радиус муфты в среднем сечении [10]; $\delta = 16$ мм – толщина стенки муфты в среднем сечении [10]; $M_{max} = 1370$ Н·м, согласно Таблице 1, т. е. $\tau_c \approx 0.59$ МПа.

Среднее срезающее напряжение при максимальном усилии среза при испытаниях (Таблица 3) $Q_{max} = 1122$ Н составляло $\tau_{cp} = Q_{max} / (2 \pi R_c \delta) = 0.0735$ МПа.

Среднее сжимающее напряжение при максимальном усилии сжатия при испытаниях (Таблица 5) $P_{max} = 3000$ Н составляло $\sigma_{сж} = P_{max} / (2 \pi R_c \delta) = 0.196$ МПа.

Таким образом испытания на сжатие и на срез выполнялись при приблизительно одинаковых по порядку касательных напряжениях, а при испытаниях на кручение муфта испытывала значительно более высокую напряжённость, оцениваемую максимальными касательными напряжениями.

Расстояние h между фланцами муфты равно $h = 56$ мм [10]. Максимальный сдвиг возникает при закрутке правого фланца относительно левого на угол $\varphi_m = 0.12$ радиана (Таблица 1). Это соответствует углу сдвига $\gamma_c \approx \varphi_m R_c / h = 0.326$, где φ_m / h – погонная закрутка.

При закрутке на $\varphi_1 = 0.02$ радиана имеем угол сдвига $\gamma_{1k} = \varphi_1 R_c / h = 0.054$. Этому углу сдвига соответствует момент $M_1 = 304$ Н·м и напряжение $\tau_{1k} = 0.13$ МПа. Таким образом приближённое значение модуля сдвига при кручении равно $G_k \approx \tau_{1k} / \gamma_{1k} = 2.407$ МПа.

При сдвиге на величину $S_1 = 1$ мм силой 294 Н во время испытания на срез (Таблица 3) среднее напряжение и угол сдвига составляли $\tau_{1c} = Q_1 / (2 \pi R_c \delta) = 0.019$ МПа; $\gamma_{1c} = S_1 / h = 0.018$. Этим значениям соответствует приближённое значение модуля на сдвиг $G_c = \tau_{1c} / \gamma_{1c} = 1.05$ МПа.

Согласно данным, приведенным в книге [12, стр. 57], модули сдвига резин двух марок имеют значения 1.76 МПа и 0.99 МПа. Эти значения близки к приведенным выше для РКО, если учесть ужесточение оболочек кордом.

На Рис. 2 приведены зависимости средних касательных напряжений от угла сдвига при кручении (1) и при сдвиге (2).

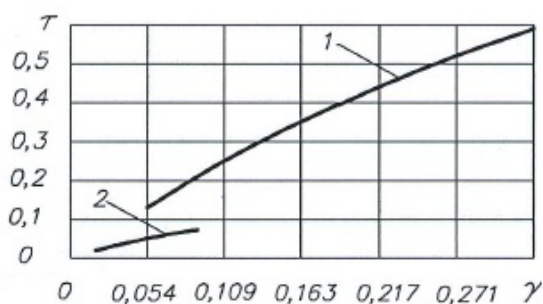


Рис. 2. Зависимости средних касательных напряжений от угла сдвига при кручении (1) и при сдвиге (2)

3. Нелинейные приращения напряжений

Анализ напряжённо-деформированного состояния (НДС) нелинейно-упругих тел связан с построением для них нелинейной матрицы упругости [20,21]. Как известно [1,2,7,8,22], «основным свойством упругого тела является обратимость происходящих в нём процессов. Существует два способа определения этого свойства. Первый обеспечивает полную восстанавливаемость формы тела, а второй – возвращение без потерь энергии, сообщённой телу при деформировании». Для тел, имеющих

склонность к гистерезису, второй способ не годится. Первый способ состоит в определении связи между тензорами напряжений и деформаций.

Применение метода конечных элементов (МКЭ) для решения задач теории упругости в перемещениях [20,21,23] предполагает использование обобщённого закона Гука в обратной форме, т.е.

$$\{\sigma\} = [D_e] \{\varepsilon\}, \quad (3)$$

где $\{\sigma\} \equiv [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T$ – вектор напряжений; $\{\varepsilon\} \equiv [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T$ – вектор деформаций; $[D_e]$ – симметричная матрица линейной упругости, определяемая согласно обратному закону Гука, который в тензорной форме имеет вид [3,8,20,21,24]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2 G_0 \varepsilon_{ij},$$

где $\theta \equiv \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – объёмное сжатие; δ_{ij} – дельта Кронекёра; λ, G_0 – параметры Ламе; $\lambda = 2 G_0 \nu / (1 - 2 \nu)$; $2 G_0 = E_0 / (1 + \nu)$; $E_0; G_0; \nu$ – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно.

Используя эти определения, закон Гука можно привести к виду

$$\sigma_{ij} = 2 G_0 (b \theta \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}), \quad (4)$$

где $b = \nu / (1 - 2 \nu)$.

Используя эту тензорную форму можно представить обобщённый закон Гука в матричной форме (3), где симметричная матрица линейной упругости имеет вид

$$[D_e] = 2 G_0 \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $a = b + 1$.

Симметрия этой матрицы является следствием линейной задачи.

Для слабо сжимаемых резиноподобных высокоэластичных материалов имеем $\nu \approx 0.49$; $b = 24.5$; $a = 25.5$. Для этих материалов можно считать коэффициент Пуассона константой, близкой к 0.5, а модули их упругости зависят от интенсивностей напряжённо - деформированных состояний (НДС). Можно, как обычно для изотропных тел, предположить, что эти материалы при различных НДС характеризуются единой кривой деформирования $\tau_e = \tau_e(\gamma_e)$, т.е. интенсивность касательных напряжений зависит от интенсивности сдвиговых деформаций

$$\gamma_e \equiv (2 e_{ij} e_{ij})^{1/2},$$

где $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (\theta/3) \delta_{ij}$ – девиаторные компоненты деформации.

В случае нелинейно упругого тела задача МКЭ ставится в приращениях перемещений, с помощью которых определяются приращения деформаций $\{d\varepsilon\}$, связанные с приращениями напряжений $\{d\sigma\}$ формулой, аналогичной формуле (3), т.е.

$$\{d\sigma\} = [D_T] \{d\varepsilon\},$$

где $[D_T]$ – тангенциальная матрица нелинейной упругости.

Чтобы получить эту матрицу продифференцируем выражение закона Гука (4), предполагая модуль G , зависящим от интенсивности сдвиговых деформаций, т.е.

$$G(\gamma_e) \equiv d\tau_e(\gamma_e)/d\gamma_e.$$

$$d\sigma_{ij} = 2G'(b\theta\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})d\gamma_e + 2G(\gamma_e)(b d\theta\delta_{ij} + d\varepsilon_{ij}), \quad (6)$$

где $G'(\gamma_e) \equiv dG(\gamma_e)/d\gamma_e$. Второе слагаемое в этой сумме линейно относительно приращений $\{d\varepsilon\}$. Его можно представить в матричной форме

$$\{d\sigma\}_2 \equiv (G(\gamma_e)/G_0)[D_e]\{d\varepsilon\}, \quad (7)$$

где G_0 – модуль сдвига при бесконечно малых деформациях.

Матрица $[D_e]$ определена в (5). Приращения $\{d\sigma\}_2$ являются линейной частью приращений напряжений $\{d\sigma\}$. Первое слагаемое в рассматриваемой сумме (6) представляет собой нелинейную часть приращений напряжений. Чтобы выразить его через приращение деформаций $d\varepsilon_{ij}$ воспользуемся формулой $\gamma_e^2 = 2e_{lm}e_{lm}$ и получим

$$d\gamma_e = (2/\gamma_e)e_{lm}de_{lm},$$

где $de_{lm} = d\varepsilon_{lm} - (d\theta/3)\delta_{lm}$ – приращение девиаторной компоненты. Вычислим сумму

$$e_{lm}de_{lm} = [\varepsilon_{lm} - (\theta/3)\delta_{lm}]d\varepsilon_{lm}$$

получим

$$d\gamma_e = (2/\gamma_e)[\varepsilon_{lm} - (\theta/3)\delta_{lm}]d\varepsilon_{lm}.$$

При этом использовано правило суммирования по повторяющимся индексам.

Подставив это приращение интенсивности сдвигов в первое слагаемое формулы (6), получим нелинейную часть приращений напряжений

$$d\sigma_{ij}^{(n)} = 4(G'/\gamma_e)(b\theta\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})[\varepsilon_{lm} - (\theta/3)\delta_{lm}]d\varepsilon_{lm}, \quad (8)$$

где $G'/\gamma_e \rightarrow 0$ при $\gamma_e \rightarrow 0$ вследствие специфического характера нелинейности функции $G'(\gamma_e)$. Поэтому нелинейные приращения напряжений отсутствуют при $\gamma_e \rightarrow 0$.

Отметим, что

$$\varepsilon_{lm} = \gamma_{lm}/2,$$

где γ_{lm} – техническая деформация сдвига. Нелинейные приращения напряжений можно представить в матричной форме

$$\{d\sigma\}_1 = 4(G'/\gamma_e)[D_n]\{\vec{V}_1\}, \quad (9)$$

где $[D_n]$ – матрица 6×6 , составленная как диадное произведение двух векторов, один из которых (\vec{V}_1) заключён в (8) в круглые скобки и представляет собой вектор – столбец, а другой (\vec{V}_2) составлен с помощью матрицы, заключённой в квадратные скобки, и представляет собой вектор – строку. Вектор – столбец \vec{V}_1 в транспонированной форме имеет вид

$$\vec{V}_1^T \equiv [\varepsilon_x + b\theta; \varepsilon_y + b\theta; \varepsilon_z + b\theta; \gamma_{xy}/2; \gamma_{yz}/2; \gamma_{zx}/2].$$

Вектор – строка

$$\vec{V}_2 \equiv [\varepsilon_x - \theta/3; \varepsilon_y - \theta/3; \varepsilon_z - \theta/3; \gamma_{xy}/2; \gamma_{yz}/2; \gamma_{zx}/2].$$

Матрица

$$[D_n] \equiv (\vec{V}_1; \vec{V}_2) - \text{диада } 6 \times 6.$$

Эту матрицу можно составить из четырёх блоков 3×3 , т. е.

$$[D_n] = \begin{bmatrix} [D_{11}] & [D_{12}] \\ [D_{21}] & [D_{22}] \end{bmatrix},$$

где $[D_{11}]$ – несимметричный, а $[D_{22}]$ – симметричный блоки 3×3 ;

$$[D_{11}] \equiv \begin{bmatrix} (\varepsilon_x + b\theta)(\varepsilon_x - \theta/3); & (\varepsilon_x + b\theta)(\varepsilon_y - \theta/3); & (\varepsilon_x + b\theta)(\varepsilon_z - \theta/3) \\ (\varepsilon_y + b\theta)(\varepsilon_x - \theta/3); & (\varepsilon_y + b\theta)(\varepsilon_y - \theta/3); & (\varepsilon_y + b\theta)(\varepsilon_z - \theta/3) \\ (\varepsilon_z + b\theta)(\varepsilon_x - \theta/3); & (\varepsilon_z + b\theta)(\varepsilon_y - \theta/3); & (\varepsilon_z + b\theta)(\varepsilon_z - \theta/3) \end{bmatrix};$$

$$[D_{12}] \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\varepsilon_x + b\theta)\gamma_{xy}; & (\varepsilon_x + b\theta)\gamma_{yz}; & (\varepsilon_x + b\theta)\gamma_{zx} \\ (\varepsilon_y + b\theta)\gamma_{xy}; & (\varepsilon_y + b\theta)\gamma_{yz}; & (\varepsilon_y + b\theta)\gamma_{zx} \\ (\varepsilon_z + b\theta)\gamma_{xy}; & (\varepsilon_z + b\theta)\gamma_{yz}; & (\varepsilon_z + b\theta)\gamma_{zx} \end{bmatrix};$$

$$[D_{21}] \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \theta/3)\gamma_{xy}; & (\varepsilon_y - \theta/3)\gamma_{xy}; & (\varepsilon_z - \theta/3)\gamma_{xy} \\ (\varepsilon_x - \theta/3)\gamma_{yz}; & (\varepsilon_y - \theta/3)\gamma_{yz}; & (\varepsilon_z - \theta/3)\gamma_{yz} \\ (\varepsilon_x - \theta/3)\gamma_{zx}; & (\varepsilon_y - \theta/3)\gamma_{zx}; & (\varepsilon_z - \theta/3)\gamma_{zx} \end{bmatrix};$$

$$[D_{22}] \equiv \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \gamma_{xy}^2 & \gamma_{yz}\gamma_{xy}; & \gamma_{zx}\gamma_{xy} \\ \gamma_{xy}\gamma_{yz}; & \gamma_{yz}^2; & \gamma_{yz}\gamma_{zx} \\ \gamma_{xy}\gamma_{zx}; & \gamma_{yz}\gamma_{zx}; & \gamma_{zx}^2 \end{bmatrix}.$$

Произведение $b\theta = \nu\theta/(1-2\nu)$ не определено для несжимаемых тел, когда $\theta = 0$, если $2\nu = 1$. Если принять $b\theta = 0$, то получим симметричную матрицу при $[D_0] = [D_n(\theta = 0)]$.

Симметричную матрицу удобно использовать при решении задач МКЭ. При этом получаются симметричные матрицы жёсткости элементов и глобальная матрица, для которых разработаны методы решений, использующие их симметрию. Если сжимаемостью пренебречь нельзя, то можно для получения приближённых решений применить симметричную матрицу $[D_s]$, полученную другим способом, а именно

$$[D_s] = 0,5 ([D_n] + [D_n]^T),$$

т. е. с применением транспонированной несимметричной матрицы. Полное приращение напряжений в нелинейной задаче является суммой $\{d\sigma\} = \{d\sigma\}_1 + \{d\sigma\}_2$ нелинейных и линейных приращений, вычисленных по формулам (9) и (7), т. е.

$$\{d\sigma\} = \left(4 \frac{G'(\gamma_e)}{\gamma_e} [D_n] + \frac{G(\gamma_e)}{G_0} [D_e] \right) \{d\varepsilon\} \equiv [D_T] \{d\varepsilon\},$$

где $[D_T]$ – тангенциальная матрица – это сумма двух матриц, заключённая в круглые скобки.

Если не прибегать к симметризации матриц, то придётся использовать стандартные итерационные методы решения больших систем линейных уравнений с несимметричными матрицами, что весьма трудоёмко.

Тангенциальная матрица применяется для решения нелинейных задач. Эти задачи решаются поэтапно. На каждом этапе тангенциальная матрица постоянна и используется как обычная матрица упругости, но для вычисления приращений перемещений в узлах сетки КЭ. Перед каждым этапом сетка КЭ перестраивается с учётом достигнутых перемещений, и ансамбль КЭ и элементарные и глобальная матрицы жёсткости определяются заново.

Результатами очередного, k – го этапа нагружения являются приращения узловых перемещений $\{dU\}_k$, по которым вычисляются приращения деформаций $\{d\varepsilon\}_k$ и сами

деформации $\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon\}_{k-1} + \{d\varepsilon\}_k$. Последние служат для определения достигнутой интенсивности деформации $\gamma_{e,k}$.

При этом выясняются условия нагружения, т. е. продолжение нагружения, если $\gamma_{e,k} > \gamma_{e,k-1}$, или разгрузка, если $\gamma_{e,k} < \gamma_{e,k-1}$. В зависимости от результатов этой проверки используется та или иная кривая деформирования $\tau_e(\gamma_e)$, т. е. $\tau_e = f_0(\gamma_e)$ при нагрузке или $\tau_e = f_p(\gamma_e)$ при разгрузке.

Используя эти зависимости определяется та или иная производная $G(\gamma_e) \equiv d\tau_e/d\gamma_e$, а также $G'(\gamma_e) = dG/d\gamma_e$, и составляется та или иная тангенциальная матрица, применяемая для вычисления приращений напряжений в нагружаемых или разгружаемых КЭ.

Сами напряжения вычисляются суммированием

$$\{\sigma\}_k = \{\sigma\}_{k-1} + \{d\sigma\}_k.$$

После этого вычисляется новая интенсивность напряжений τ_e и выполняется уточнение тангенциальной матрицы для уточнения приращений напряжений. После достижения сходимости можно вычислить новое начальное приближение тангенциальной матрицы для начала нового этапа нелинейного деформирования, т. к. она нужна для составления элементных матриц жёсткости.

4. Выводы

1. Полученные коэффициенты нелинейности, полученные на основании интегральных характеристик и тензорного исчисления упругих многослойных оболочек, могут быть использованы в уточнённых расчётах на прочность композитных и полимерных элементов конструкций.
2. Состояния (разгрузка или нагрузка) в различных КЭ могут быть разными. В зависимости от этого применяется та или иная тангенциальная матрица.

Для реализации приведенного алгоритма необходимо:

- доработать стандартную программу решения линейно-упругих задач без начальных перемещений, напряжений и деформаций в программу с этими полями, имеющими ненулевые значения;
- доработать программу с целью обеспечения возможности вводить на каждом этапе нагружения переменное значение модуля упругости $G(\gamma_e)$ и его производной $G'(\gamma_e)$;
- вычислять новые достигнутые значения перемещений узлов и их координат, а также новые значения напряжений и деформаций через их приращения;
- ввести в программу проверку условия выполнения процессов нагрузки и разгрузки, применяя при этом различные зависимости интенсивностей напряжений τ_e от интенсивностей деформаций γ_e для нагрузки и разгрузки, которые заранее должны вводиться в исходные данные.

Литература

- [1] Basar Y, Weichert D. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Berlin: Springer; 2000.
- [2] Godunov SK, Romenskii EI. *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws*. NY: Springer; 2003.
- [3] Ломакин ВА. *Теория упругости неоднородных тел*. Москва: Ленанд; 2014.
- [4] Грин А, Адкинс Дж. *Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды*. Москва: Мир; 1965.
- [5] Starovoitov EI, Leonenko DV. Resonance Oscillations of a Three-layered Cylindrical Shell with an Elastic Filler. *Journal Mechanics of Composite Materials*. 2016;22(1): 60-68.

- [6] Бидерман ВЛ. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. Москва: Ленанд; 2017.
- [7] Еремеев ВА, Зубов ЛМ. *Механика упругих оболочек*. Москва: Наука; 2008.
- [8] Голушко СК, Немировский ЮВ. *Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения*. Москва: Физматлит; 2008.
- [9] Бидерман ВЛ. *Теория механических колебаний*. М.: Ленанд; 2017.
- [10] Поляков ВС, Барбаш ИД, Ряховский О.А. *Справочник по муфтам*. Ленинград: Машиностроение; 1979.
- [11] Потураев ВН. *Резиновые и резино – металлические детали машин*. Москва: Машиностроение; 1966.
- [12] Потураев ВН, Дырда ВИ, Круш ИИ. *Прикладная механика резины*. Киев: Наукова думка; 1980.
- [13] Danilin AN, Vinogradov AA, Karnet YN. Models of Hysteresis, a Brief Survey. *Journal Mechanics of Composite Materials*. 2016;22(2): 295-308.
- [14] Ключков ЮВ, Николаев АП, Киселёва ТА. Конечно-элементный расчёт тонкостенных конструкций из сочленённых оболочек с различными физико-механическими характеристиками материала. *Проблемы машиностроения и надёжности машин*. 2017;3: 32-38.
- [15] Доронин СВ, Роголёв АН, Рейзмунт ЕМ. Сравнительный анализ аналитических и численных оценок напряжённо-деформированного состояния элементов конструкций. *Проблемы машиностроения и надёжности машин*. 2017;4: 54-59.
- [16] Кристенсен Ф. *Введение в теорию вязкоупругости*. Москва: Мир; 1974.
- [17] Payne A, Whittaker R. Importance of hysteresis in the reinforcement of elastomers. *Colloq. Int. C.N.R.S.* 1975;231: 233-245.
- [18] Махутов НА, Щеглов БА, Евдокимов АП. Деформация кручения торообразной резинорезинной оболочки и статическое нагружение жёсткого и упругого карданного привода. *Проблемы машиностроения и надёжности машин*. 2004;5: 46-49.
- [19] Zezin YP, Lomakin EV. Nonlinear Stress Relaxation in Filled Elastomers. *Journal Mechanics of Composite Materials*. 2015;21(3): 382-392.
- [20] Borg SF. *Matrix Tensor Methods in Continuum Mechanics*. Singapore: World Scientific Pub. Co. Inc; 1990.
- [21] Heinbockel JH. *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*. Trafford Publishing; 2001.
- [22] Лурье АИ. *Теория упругости*. Москва: Наука; 1970.
- [23] Bonet J, Wood RD. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press; 1997.
- [24] Прагер В. *Введение в механику сплошных сред*. Москва: Мир; 1963.

NONLINEAR ELASTIC PROPERTIES OF RUBBER-CORD SHELLS OF REVOLUTION

Alexey Evdokimov

Federal state budgetary establishment of a science Institute theoretical engineering him. A.A. Blagonravova

The Russian academy of sciences (IMASH the Russian Academy of Science)

101990 Moscow, Maly Kharitonevsky per. 4

e-mail: a_evdo@mail.ru

Abstract. The article presents the results of the study of nonlinear elastic properties of rubber-cord shells under static loading. A method for determining nonlinear properties is proposed. The approximations obtained in this case satisfactorily describe the results of the experiments.

Keywords: damping ability of the hysteresis loop, coefficients of the nonlinearity, stress tensor, tangent matrix

References

- [1] Basar Y, Weichert D. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Berlin: Springer; 2000.
- [2] Godunov SK, Romenskii EI. *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws*. NY: Springer; 2003.
- [3] Lomakin VA. *Theory of elasticity of inhomogeneous bodies*. Moscow: Lenand; 2014. (In Russian)
- [4] Green A, Adkins J. *Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics*. Moscow: Mir; 1965. (In Russian)
- [5] Starovoitov EI, Leonenko DV. Resonance Oscillations of a Three-layered Cylindrical Shell with an Elastic Filler. *Journal Mechanics of Composite Materials*. 2016;22(1): 60-68.
- [6] Biderman VL. *Mechanics of thin-walled structures. Statics*. Moscow: Lenand; 2017. (In Russian)
- [7] Eremeev VA, Zubov LM. *Mechanics of elastic shells*. Moscow: Nauka; 2008. (In Russian)
- [8] Golushko SK, Nemirovsky YV. *Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation*. Moscow: Fizmatlit; 2008. (In Russian)
- [9] Biderman VL. *Theory of mechanical vibrations*. Moscow: Lenand; 2017. (In Russian)
- [10] Polyakov VS, Barbash ID, Ryakhovsky OA. *Handbook of couplings*. Leningrad: Mashinostroenie; 1979. (In Russian)
- [11] Poturaev VN. *Rubber and rubber – metal parts of machines*. Moscow: Mashinostroenie; 1966. (In Russian)
- [12] Poturaev VN, Dyrda VI, Krush II. *Applied mechanics of rubber*. Kiev: Naukova Dumka; 1980. (In Russian)
- [13] Danilin AN., Vinogradov AA, Karnet YN. Models of Hysteresis, a Brief Survey. *Journal Mechanics of Composite Materials*. 2016;22(2): 295-308.

- [14] Klochkov YV, Nikolaev AP, Kiseleva TA. Finite-element calculations of thin-walled structures of concatenated shells with different material stress–strain properties. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017;46(3): 246-252.
- [15] Doronin SV, Reizmund E.M., Rogalev A.N. Problems on comparing analytical and numerical estimations of stressed-deformed state of structure elements. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017;46(4): 364-369.
- [16] Christensen F. *Introduction to the theory of viscoelasticity*. Moscow: Mir; 1974. (In Russian)
- [17] Payne A, Whittaker R. Importance of hysteresis in the reinforcement of elastomers. *Colloq. Int. C.N.R.S.* 1975;231: 233-245.
- [18] Makhutov NA, Shcheglov BA, Evdokimov AP. Torsion deformation of toroidal rubber-cord shell and static loading of rigid and elastic gimbal drive. *Problems of mechanical engineering and reliability of machines*. 2004;5: 46-49.
- [19] Zezin YP, Lomakin EV. Nonlinear Stress Relaxation in Filled Elastomers. *Journal Mechanics of Composite Materials*. 2015;21(3): 382-392.
- [20] Borg SF. *Matrix Tensor Methods in Continuum Mechanics*. Singapore: World Scientific Pub. Co. Inc; 1990.
- [21] Heinbockel JH. *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*. Trafford Publishing; 2001.
- [22] Lurie AI. *Theory of elasticity*. Moscow: Nauka; 1970. (In Russian)
- [23] Bonet J, Wood RD. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press; 1997.
- [24] Prager V. *Introduction to continuum mechanics*. Moscow: Mir; 1963. (In Russian)