

УПРУГИЕ ПОЛЯ НАНОСКОПИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В НАНОКОМПОЗИТАХ

И.А. Овидько*, А.Г. Шейнерман

Институт проблем машиноведения Российской Академии наук,
Большой пр. В.О., 61, Санкт-Петербург 199178, Россия

* Email: ovidko@nano.ipme.ru

Аннотация. Дан обзор аналитических решений для упругих полей нановключений в неоднородных твердых телах. Особое внимание уделено случаю нанокompозитов. Кроме того, дано описание наиболее распространенных аналитических методов расчета упругих полей включений в нанокompозитах. Эти методы включают метод функций Грина, метод поверхностных дислокационных петель, интегрирование уравнений равновесия, а также метод бесконечно малых включений. Кроме того, обсуждаются и сравниваются решения для упругих полей нановключений, полученных в рамках линейной теории упругости, с решениями, полученными с помощью компьютерного моделирования на атомном уровне. Показано, что линейная теория упругости оказывается верна вплоть до очень малых размеров нановключений.

Ключевые слова: нанокompозиты, включения

1. Введение

Нанокompозиты представляют собой широкий класс композиционных материалов, содержащих как минимум одну фазу с размерами в нанометровом диапазоне. Большой интерес к таким материалам связан с их уникальными механическими, электронными и оптическими свойствами (например, обзоры [1–11]). В частности, нанокompозиты могут обладать более высокой прочностью, твердостью и термической стабильностью и лучшей электрической проводимостью, чем композиционные материалы с большими размерами включений. Особый интерес представляют композиты, упрочненные нанотрубками [12–15], и нанокompозиты с ансамблями квантовых точек и проволок [16–21].

Уникальные механические и электронные свойства нанокompозитов во многом определяются упругими полями их включений. Знание упругих деформаций и напряжений в нанокompозитах необходимо для расчета их механической прочности, определения условий их разрушения, и расчета критических параметров формирования линейных дефектов в нанокompозитах. В случае квантовых точек и проволок их упругие поля оказывают определяющее влияние на их электронные свойства и управляют пространственным расположением, размером и формой наноструктур, растущих на поверхности нанокompозита с квантовыми точками или проволоками.

Упругие поля включений в нанокompозитах зависят от множества факторов,

которые включают материальные и геометрические параметры нанокомпозитов (типы и параметры кристаллических решеток включения и матрицы, размер и форму включения, энергию границы раздела включения и матрицы), а также взаимную диффузию матрицы и включения. В нанокомпозитах, имеющих структуру твердого раствора, на упругие поля включений также влияет сегрегация атомов одного сорта. Несмотря на существенную взаимную диффузию матрицы и включений в нанокомпозитах [23–34], расчет упругих полей в нанокомпозитах с учетом реального пространственного неоднородного распределения концентрации различных компонент представляет собой очень сложную задачу. Поэтому при расчете упругих полей нановключений диффузией атомов обычно пренебрегают.

Упругие поля, действующие в нанокомпозитах, рассчитываются в рамках различных подходов. Эти подходы включают методы классической теории упругости [35–60], атомистические расчеты [39,52,61–70], а также методы, объединяющие упругие континуальные модели нанокомпозитов с атомистическими расчетами (например, [71]).

В континуальных моделях, основанных на теории упругости, включения в нанокомпозитах описываются с помощью тензора собственных деформаций, которые связаны с различием (несоответствием) кристаллических решеток включения и матрицы. В рамках континуальных подходов упругие поля, действующие в нанокомпозитах, рассчитываются с помощью аналитических методов [35,36,38,40–42,47,48–50,54,56,60] и численных методов (метода конечных элементов [35,37,43,45,46,51,52,55,57–59], метода граничных интегралов (например, [53]), а также метода конечных разностей (например, [39])).

В отличие от атомистических расчетов использование континуальных моделей для вычисления упругих полей включений в нанокомпозитах позволяет получить решения, применимые для нанокомпозитов с различным химическим составом. В тоже время классическая линейная теория упругости может давать неточные значения упругих полей включений в случаях, если включение является фасетированным, его размеры очень малы или несоответствие параметров кристаллических решеток включения и матрицы очень велико.

В случае фасетированного включения применение линейной теории упругости может приводить к неточным значениям упругих полей включений из-за расходимости некоторых компонент тензора напряжений на ребрах фасетированных включений. Поэтому в областях вблизи ребер таких включений линейная теория упругости неприменима. Однако размеры таких областей очень малы, и поэтому их наличие является несущественным.

При очень малых размерах включения линейная теория упругости может не выполняться, когда наименьший из размеров включений сравним с размером атома. Для оценки нижнего предела применимости теории упругости упругие поля, полученные с ее помощью, необходимо сравнить с результатами атомистических расчетов. В работе [67] такое сравнение было проведено для сферических включений. Авторы работы [67] показали, что величины деформаций, даваемые теорией упругости, идеально согласуются с полями, полученными молекулярно-динамическим моделированием, если радиус включения превышает 5 межатомных расстояний. При радиусе включения в 4–5 межатомных расстояний эти величины имеют не очень существенные расхождения. Прекрасное совпадение упругих полей наноскопических включений различной формы, рассчитанных в рамках континуального и атомистического подходов, также было продемонстрировано в работах [51,63].

Различие результатов расчетов в рамках континуальных и атомистических подходов возникает только в случае очень больших несоответствий параметров

кристаллических решеток включений и матрицы [39] и, по-видимому, связано с погрешностями линейной теории упругости при больших деформациях.

Таким образом, сравнение результатов, полученных в рамках классической теории упругости, с атомистическими расчетами свидетельствует о возможности использования линейной теории упругости для расчета упругих полей, действующих в нанокompозитах. Краткий обзор аналитических решений для упругих полей нанокompозитов будет дан в следующем параграфе. В последующих параграфах мы также опишем наиболее популярные аналитические методы расчета полей перемещений, деформаций и напряжений в нанокompозитах.

2. Аналитические решения задач об упругих полях включений

Рассмотрим область материала, где в дополнение к упругим деформациям действуют неупругие (собственные) деформации. Такие деформации могут являться следствием термического расширения или сжатия материала, появляться в результате несоответствия параметров кристаллических решеток включения и матрицы, а также возникать в ходе фазовых превращений или пластической деформации. Следуя Муре [72], будем называть такую область включением, если ее упругие константы равны упругим константам остального материала (матрицы), и неоднородностью, если ее упругие константы отличаются от упругих констант матрицы. В дальнейшем мы в основном будем рассматривать более простой случай, в котором различие между упругими константами различных фаз композита не очень велико и область с собственными деформациями можно моделировать как включение.

Точные аналитические решения для упругих полей включений имеются для изотропных и анизотропных включений, расположенных в бесконечной или полубесконечной среде, пластине конечной толщины, цилиндре, а также бесконечной плоскости или полуплоскости. Рассмотрим сначала работы, посвященные упругим полям изотропных включений в бесконечной среде. Одной из первых работ в этой области является работа [73]. В этой работе собственные деформации возникали вследствие термического расширения материала, и рассматривались эллиптическое и прямоугольное включение в тонкой бесконечной пластине. Позднее были решены задачи о термических напряжениях, вызываемых эллипсоидом вращения и равномерно нагретым полубесконечным круглым цилиндром [74,75]. Решение задачи об эллипсоидальном включении в изотропной бесконечной среде, испытывающем произвольную однородную собственную деформацию, было впервые получено в работах Эшелби [76–78], собранных в книге [79]. Эшелби, в частности, показал, что упругие деформации и напряжения внутри эллипсоидального включения, расположенного в бесконечной среде, однородны. Частными случаями эллипсоидального включения являются цилиндрическое и сферическое включения. Выражения для упругих полей, создаваемых цилиндрическим включением с трехосной дилатацией получены в работе [80] с помощью уравнений равновесия. В работе [81] упругие поля перемещений, деформаций и напряжений для сферического включения с одноосной дилатацией получены с помощью непрерывного распределения круговых дислокационных петель по поверхности сферы. Аналогичным методом недавно также были рассчитаны упругие поля сегментированного сферического включения с одноосной собственной деформацией [82]. Кроме того, с помощью функции Грина были рассчитаны поля напряжений включений, имеющих форму полусферы [83] и цилиндра конечной длины [84].

В перечисленных выше решениях [74–81] для эллипсоидальных включений создаваемые ими упругие деформации и напряжения не испытывают расходимостей.

Иначе обстоит дело с фасетированными включениями. Уже первое решение Гудиера [73] для прямоугольного включения в тонкой пластине показало, что в вершинах прямоугольной границы сдвиговые деформации и напряжения являются сингулярными. Обобщение решения Гудиера на случай нагретой области в виде параллелепипеда было сделано Игначком и Новацким в 1958 г. и опубликовано в книге [85]. Термические напряжения, создаваемые конечным числом включений, имеющих форму параллелепипеда, исследовались в работе [86], результаты которой опубликованы также в книге [87]. Упругие поля изотропных включений в виде параллелепипеда, испытывающих произвольную собственную деформацию, рассчитывались в работах [88–91]. В частности, Фэвр показал [89], что если собственная деформация включения представляет собой чистую дилатацию, то упругая дилатация однородна внутри включения и равна нулю вне его. Как следствие, упругая энергия такого включения не зависит от его формы.

В последние годы был также решен ряд задач для изотропных включений, имеющих форму многоугольников или многогранников [38,42,92–98]. В частности, Персон и Фо с помощью функций Грина рассчитали поле напряжений, создаваемое в изотропной бесконечной среде усеченной пирамидой [42]. Фо с соавторами вычислили поле деформаций, создаваемых включениями в виде проволок произвольного сечения [38]. Гослинг и Виллис рассчитали упругие поля ряда включений в виде проволок с трапециидальным поперечным сечением [92]. Хотя в общем случае упругие деформации внутри многоугольников и многогранников неоднородны [93,95], Мура показал [96,97], что существуют включения в виде многоугольников специального вида, создающие внутри себя однородное поле деформаций. Таким образом, вопреки утверждению Эшелби [76–78] оказалось, что однородность упругих деформаций внутри включений присуща не только эллипсоидальным включениям.

Большинство решений задач об изотропных включениях в бесконечной среде были также распространены на случай включений в полупространстве. По-видимому, первой задачей о включении в полубесконечной среде была задача [99] о сферическом включении с однородной дилатационной собственной деформацией, вызываемой различием коэффициентов термического расширения включения и матрицы. Позднее это решение было обобщено на случай произвольной однородной собственной деформации [100]. Сео и Мура получили решения для эллипсоидального включения с дилатационной собственной деформацией [101], а авторы работы [102] решили задачу об осесимметричном включении с дилатацией и однородной деформацией растяжения. Взаимодействие сфероидального включения со свободной поверхностью рассматривалось в работах [103,104]. В работе [103] также было проанализировано взаимодействие между центрами дилатации, расположенными вблизи плоской свободной поверхности. Наконец, решение задачи о полусферическом включении в полупространстве было получено в недавней работе [105].

По-видимому, первая работа, посвященная расчету упругих полей фасетированного включения в полупространстве, принадлежит Чиу [106]. Чиу рассмотрел включение в виде параллелепипеда с произвольной дилатацией, одна из граней которого параллельна свободной поверхности, и получил решение в виде полиномов Лежандра. Позднее в работе [107] было получено альтернативное решение для поля напряжений, создаваемых дилатационным включением в виде параллелепипеда вне этого включения. В работе [107] предполагалось, что собственная деформация включения является чисто дилатационной и возникает в результате различия коэффициентов термического расширения включения и матрицы. Решения [106,107] были дополнены Гласом [108], который рассчитал не только напряжения и деформации, создаваемые включением с дилатационной собственной

деформацией, но также и создаваемые им перемещения и его упругую энергию. В отличие от решения [107] решение Гласа [108] описывает упругие поля как вне включения, так и внутри него.

Решение [107] было получено посредством интегрирования упругих полей, создаваемых точечными источниками расширения, по объему включения. Решение [108] для включения в форме параллелепипеда было получено с помощью рассчитанных в этой же работе упругих полей пластинчатого включения, собственная деформация которого меняется по синусоидальному закону. Такое включение в форме пластины может, в частности, моделировать пленку с переменным химическим составом. Как предельный случай включения в виде параллелепипеда в работах [107,108] рассмотрено включение в виде бесконечной проволоки прямоугольного сечения, параллельной свободной поверхности, и рассчитаны его упругие поля. Выражения для поля напряжений, создаваемых бесконечной прямоугольной проволокой в полупространстве, были также получены Гуткиным с помощью решения для такой проволоки в пластине [109]. Эти выражения приведены в книге [110] и работе [111]. Наконец, перемещения, создаваемые в полупространстве рядом бесконечных прямоугольных проволок, были рассчитаны Каганером с соавторами [60].

Используя выражения [108] для перемещений, создаваемым в полупространстве включением в виде параллелепипеда, Глас [48,49] рассчитал упругие поля, создаваемые включениями, имеющими форму усеченной пирамиды и трапециидальной проволоки. (Частный случай первой из этих задач был также рассмотрен в работе [56]. В этой работе рассчитывалось среднее нормальное напряжение и дилатация, создаваемые приповерхностным пирамидальным включением на плоской свободной поверхности.) Позднее Глас использовал решение для одиночной трапециидальной нанопроволоки для расчета упругих полей, создаваемых рядом таких нанопроволок [50], и обобщил это решение на случай произвольных фасетированных включений бесконечной длины. В качестве предельного случая решения для включения в виде трапециидальной нанопроволоки в полубесконечном теле Глас получил выражения для упругих полей такого включения в бесконечной среде [50]. Для расчета упругих полей пирамидальных и призматических включений в полупространстве последние моделировались непрерывными распределениями бесконечно тонких включений в форме параллелепипеда [48,49]. Этот же метод был использован для расчета полей перемещений и деформаций, создаваемых включением в виде кругового цилиндра конечной длины, параллельного плоской свободной поверхности [54]. Путем предельных переходов в работе [54] были также рассчитаны упругие поля, создаваемые включениями в виде полубесконечного и бесконечного цилиндра, находящимися в полубесконечном теле, а также включением в форме цилиндра конечной длины, расположенным в бесконечной среде. Решение [54] для цилиндрического включения конечной длины, параллельного свободной поверхности тела, дополнило предыдущие решения для цилиндрического включения конечной длины, перпендикулярного плоской свободной поверхности [112–114].

Решения многих задач о включениях в изотропной бесконечной или полубесконечной среде также распространены на случай двухфазной бесконечной среды с плоской границей раздела фаз. Обе фазы при этом предполагаются упругоизотропными, но имеют различные значения упругих модулей. При решении задач о включениях в двухфазной среде различают два типа границ: когерентные границы и границы с проскальзыванием. Для обоих типов границ должны выполняться условия непрерывности нормальных к границе напряжений и перемещений. Кроме того, на когерентной границе раздела должны быть непрерывны касательные к ней компоненты напряжений, а на границе с проскальзыванием эти напряжения должны

обращаться в нуль. Большинство задач о включениях решено для более распространенных когерентных границ, хотя существуют решения и для границ с проскальзыванием. К наиболее простым задачам о включениях в двухфазной среде с когерентной границей относятся задачи о центре дилатации [115,116], сферическом включении с произвольной однородной деформацией [117], а также центре деформации [118]. Центром деформации авторы [118], следуя Миндлину [119], называют единичную сосредоточенную силу, пару таких сил или центр дилатации. На основе решения для центра деформации в работе [120] было получено решение для однородного включения произвольной формы вблизи плоской границы раздела. При этом рассматривалась как когерентная граница, так и граница с проскальзыванием. В предельном случае, когда упругие модули одной из сред полагались равными нулю, а форма включения полагалась эллипсоидальной или осесимметричной, авторы получали известные результаты [102,104] для включений у свободной поверхности.

Общее решение задачи о произвольном включении в двухфазной среде в [102,104] было получено интегрированием упругих полей, создаваемых в такой среде центром деформации, по объему включения. Незадолго до авторов работ [102,104] аналогичный метод расчетов был использован для расчета напряжений, создаваемых включением в виде параллелепипеда в полупространстве [107]. Заметим, что, как и для случая бесконечной среды, решение для произвольного включения в полупространстве или в двухфазной среде может быть получено с помощью метода функций Грина, то есть интегрированием упругих полей, создаваемых единичной сосредоточенной силой, по объему включения. В частности, метод функций Грина использовался в работе [121] для расчета упругих полей и энергии цилиндрического и сферического включения, а также для решения задачи о произвольном осесимметричном включении у границы раздела фаз [122]. Наряду с задачами о включениях в двухфазной трехмерной среде были получены решения двумерных задач для произвольных включений в двухфазной плоскости [123,124]. Для решения этих задач использовался метод конформных отображений.

Кроме задач о включениях в однофазной и двухфазной бесконечной среде, а также полупространстве, несколько авторов решали задачи о включениях в пластине конечной толщины и бесконечном цилиндре. Так, в [109] была решена задача о включении в виде бесконечной проволоки прямоугольного сечения, ось которой параллельна поверхности пластины. Решение этой задачи, приведенное также в книге [110], было получено на основе решения для поля напряжений такого включения в бесконечной среде с помощью метода виртуальных поверхностных дислокаций [125]. В рамках этого метода поле напряжений включения в пластине искалось в виде суммы поля напряжений такого включения в бесконечной среде и полей напряжений виртуальных дислокаций, непрерывно распределенных по свободным поверхностям пластины. При этом плотности распределений дислокаций определялись из граничных условий на свободных поверхностях пластины путем решения соответствующих интегральных уравнений.

Другой задачей, решенной для включения в пластине конечной толщины, является задача о центре дилатации. Решение этой задачи получено авторами работы [126] и дополняет предыдущее решение этих авторов для центра деформации в двухфазной среде [118]. На основе решения для центра дилатации в работе [126] получено общее решение для произвольного включения в пластине с чисто дилатационной собственной деформацией. В качестве иллюстрации полученного общего решения рассмотрено сферическое включение в пластине. Позднее Чанг с соавторами [127] решили задачу о другом типе включения в пластине – цилиндрическом включении, перпендикулярном свободным поверхностям пластины.

Это решение дополняет существующие решения для подобного цилиндрического включения в полупространстве [112–114]. Наряду с решениями задач о включениях в пластине, отметим также решение задачи о бесконечном цилиндрическом включении с однородной дилатационной собственной деформацией, расположенном в цилиндрической проволоке и соосным этой проволоке [128,129].

Многие решения, полученные для включений в изотропных средах, были также обобщены на случай упругой анизотропии. В частности, в работах [130,131] с помощью метода комплексных потенциалов были получены решения двумерных задач о цилиндрических включениях в анизотропных бесконечных средах. Решение [130] было обобщено Виллисом [132] на случай кубической симметрии. Последующий анализ был проведен также для эллиптических включений для случая ортотропной среды [133,134] и среды с одной плоскостью симметрии [135]. Задача об эллипсоидальном включении в анизотропной бесконечной среде рассматривалась Асаро и Барнетом [136], Мурой [72], а также Куниным и Сосниной [137]. Андреев с соавторами в интегральном виде получили решение для деформаций, создаваемых в бесконечном кубическом кристалле включениями в виде сферы, куба, пирамиды, полусферы, усеченной пирамиды и плоского цилиндра [40]. Холи с соавторами рассмотрели задачу о центре дилатации в анизотропном полубесконечном кубическом кристалле [41]. Янг и Чоу получили общие решения для обобщенной плоской [138] и антиплоской [139] двумерных задач об эллиптических включениях в бесконечной анизотропной среде. Позднее решение [139] антиплоской задачи для эллиптического включения было обобщено на случай анизотропного полупространства [140] и двухфазной анизотропной среды [141]. Кроме того, Ру [142] получил также общее решение для включения произвольной формы в анизотропной плоскости или полуплоскости.

Недавно ряд задач для упругих полей нановключений был решен с учетом действия межфазных напряжений, действующих на границах раздела матрицы и включений [143–156]. (Такие напряжения связаны как с наличием натяжения границ раздела (аналогом поверхностного натяжения), так и с зависимостью удельной энергии границ раздела от деформации. Концепция поверхностных/межфазных напряжений была развита в работах Гуртина и Мурдоха [157,158] и Гуртина с соавторами [159] (см. также обзор [150]). Согласно этой концепции, из-за действия поверхностного/межфазного натяжения и зависимости удельной энергии свободной поверхности/границы раздела от деформации, на свободной поверхности или границе раздела возникают дополнительные поверхностные силы. Эти поверхностные силы изменяют классические граничные условия на свободной поверхности/границе раздела.) Учет межфазных напряжений был сделан при решении задач о поле напряжений сферических наномасштабных неоднородностей [143,144] и нановключений [149]. В рамках этой концепции были рассчитаны упругие поля эллипсоидальных нановключений [154] и получены общие выражения для тензора Эшелби произвольных дилатационных нановключений [146]. Результаты этих работ свидетельствуют о том, что учет поверхностных напряжений изменяет деформации, создаваемые нановключениями, на несколько процентов. Например, при радиусе сферического включения 15 нм отличие составляет около 2 процентов а при радиусе 5 нм – около 8 процентов [149]. Недавно упругие поля нановключений/неоднородностей с учетом межфазных и поверхностных напряжений были рассчитаны для наночастиц, расположенных вблизи плоской свободной поверхности [151,152], в пленке на подложке [145,153] и в сферической матрице [155].

Таким образом, в настоящее время существует большое число аналитических решений для полей напряжений и деформаций включений различной формы в изотропных и анизотропных бесконечных и полубесконечных средах, а также

цилиндрах и пластинах. По-видимому, наиболее общим методом решения таких задач для включений в бесконечной или полубесконечной среде является метод функций Грина. Поскольку этот метод широко применяется при расчете упругих полей, действующих в нанокompозитах, мы изложим его в следующем параграфе.

3. Метод функций Грина

Следуя Кренеру [160], представим полную деформацию e_{ij} в материале в виде суммы упругой деформации ε_{ij} и собственной (неупругой) деформации ε_{ij}^* : $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^*$. При наличии в материале (матрице) включения, расположенного в некоторой трехмерной области Ω , собственную деформацию можно представить в виде $\tilde{\varepsilon}_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^* g(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – точка в пространстве координат, $g(\mathbf{x}) = 1$, если точка x расположена в области Ω и $g(\mathbf{x}) = 0$ в противном случае. Равенство $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^* g(\mathbf{x})$ означает, что собственная деформация равна ε_{ij}^* внутри включения и нулю в матрице.

Метод функций Грина позволяет по заданной собственной деформации ε_{ij}^* внутри включения, а также по его форме и размеру (характеризуемыми функцией $g(\mathbf{x})$) рассчитать создаваемые им упругие поля. Согласно [72], перемещения u_i , создаваемые включением, рассчитываются по формуле

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V C_{jlmn} \tilde{\varepsilon}_{mn}^*(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x_l} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (1)$$

В формуле (1) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – трехмерный вектор, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$, V – область, занимаемая материалом (включением и матрицей) в пространстве координат (x_1, x_2, x_3) , C_{jlmn} – тензор упругих модулей, а $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ – тензор Грина среды. В случае, если собственная деформация включения однородна (то есть $\varepsilon_{mn}^* = \text{const}$), формулу (1) можно представить в виде

$$u_i(\mathbf{x}) = C_{jlmn} \varepsilon_{mn}^* \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (2)$$

а также записать в виде интеграла по границе $|\Omega|$ включения [72]:

$$u_i(\mathbf{x}) = C_{jlmn} \varepsilon_{mn}^* \int_{|\Omega|} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') n_l(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}'), \quad (3)$$

где \mathbf{n} обозначает внешнюю нормаль к поверхности $|\Omega|$.

Величины функций Грина G_{ij} , входящих в формулы (1)–(3), численно равны перемещениям \tilde{u}_i , создаваемым в точке \mathbf{x} единичной сосредоточенной силой, приложенной в точке \mathbf{x}' в направлении оси x_j . В случае бесконечной среды тензор Грина зависит только от разности $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Для изотропной бесконечной среды выражения для функций Грина были впервые получены Кельвином [161] и имеют вид [72]:

$$G_{kl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R} \{ (3-4\nu)\delta_{kl} + (x_k - x_k')(x_l - x_l') / R^2 \}, \quad (4)$$

где $R = [(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2]^{1/2}$, δ_{kl} символ Кронекера, равный 1 при $k = l$ и 0 при $k \neq l$, μ – модуль сдвига, а ν – коэффициент Пуассона. Функции Грина для различных бесконечных анизотропных сред также были получены в различной форме

[162–176].

Тензор Грина для изотропной полубесконечной среды $x_3 \geq 0$ был впервые получен Миндлином [119]. Заметим, что в работе Миндлина [119] была допущена ошибка в знаке, исправленная им в 1975 г. в частном сообщении. В исправленном виде выражения для тензора Грина изотропной полубесконечной среды $x_3 \geq 0$ приведены в книге Муры [72] и имеют следующий вид (в единицах $1/[16\pi\mu(1-\nu)]$):

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left\{ \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2 + x_3 + x_3'} + \frac{R_2^2 + 2x_3x_3'}{R_2^3} \right\} \delta_{ij} + (x_i - x_i')(x_j - x_j') \left\{ \frac{1}{R_1^3} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2 + x_3 + x_3')^2} + \frac{(3-4\nu)R_2^2 - 6x_3x_3'}{R_2^5} \right\}, \quad (5a)$$

$$G_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (x_j - x_j') \left\{ (x_3 - x_3') \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_2^3} \right] + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2 + x_3 + x_3')} - \frac{6x_3x_3'(x_3 + x_3')}{R_2^5} \right\}, \quad (5b)$$

$$G_{i3}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (x_i - x_i') \left\{ (x_3 - x_3') \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_2^3} \right] - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2 + x_3 + x_3')} + \frac{6x_3x_3'(x_3 + x_3')}{R_2^5} \right\}, \quad (5c)$$

$$G_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{(x_3 - x_3')^2}{R_1^3} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(3-4\nu)(x_3 + x_3')^2 - 2x_3x_3'}{R_2^3} + \frac{6x_3x_3'(x_3 + x_3')^2}{R_2^5}, \quad (5d)$$

где $i, j = 1, 2$, а $R_{1,2}^2 = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 \mp x_3')^2$.

Следует отметить, что функции Грина, определяемые формулами (5), дают перемещения, создаваемые единичной сосредоточенной силой в полубесконечном теле. Задача расчета перемещений, созданных такой силой в полубесконечном теле, называется задачей Миндлина. Другая задача относится к случаю, когда сосредоточенная сила приложена на поверхности полубесконечного тела. Эта задача называется задачей Буссинеска. Для обоих классов задач функции, связывающие приложенную силу и создаваемые ей перемещения, называются функциями Грина. Однако здесь мы не будем обсуждать функции Грина, возникающие в задаче Буссинеска, и ограничимся функциями Грина в задаче Миндлина. Детальное рассмотрение задачи Буссинеска для анизотропных твердых тел сделано в обзоре [177].

Функции Грина для анизотропных полубесконечных твердых тел были получены в интегральной форме Портзем и Марадულიным [178] для случая кубических кристаллов. Позднее функции Грина для анизотропных полупространств были рассчитаны Валькером [179] и Пэнном [180].

Для изотропного случая тензоры Грина получены также для двухфазной среды с когерентной границей [181] и проскальзывающей границей [182]. Выражения для тензоров Грина таких сред приведены также в книге [72].

Рассчитав по формуле (1) перемещения u_i , создаваемые включением, нетрудно также получить выражения для создаваемых им полных деформаций e_{ij} и напряжений σ_{ij} . Суммарные деформации e_{ij} выражается через перемещения u_i по формуле

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (6)$$

С помощью закона Гука и соотношения $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*$ напряжения σ_{ij} выражаются через деформации ε_{ij} следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} (e_{kl} - \tilde{\varepsilon}_{kl}^*). \quad (7)$$

В средах, для которых существуют точные аналитические выражения для функций Грина, перемещения, деформации и напряжения, создаваемые включением, можно рассчитывать непосредственно по формулам (1), (6) и (7). Однако для большинства анизотропных твердых тел функции Грина могут быть представлены только в виде интегралов или рядов [162–164,175]. Поэтому во многих случаях, особенно для анизотропных твердых тел, более удобным оказывается использование выражений для Фурье-образов функций Грина.

Для бесконечной среды функции Грина зависят только от разности координат $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$, что позволяет применить к правой части формулы (1) теорему о свертке функций. С помощью этой теоремы трехмерные Фурье-образы \hat{u}_p и $\hat{\varepsilon}_{pq}$ перемещений и деформаций, создаваемых включением, можно выразить через трехмерные Фурье-образы \hat{G}_{pq} функций Грина $G_{pq}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. (Здесь и далее трехмерные преобразования Фурье произвольных функций $f(\mathbf{x})$ определяются соотношением $\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}$, где $i = \sqrt{-1}$). Для этой цели модифицируем формулу (1), заменив в этой формуле $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ на $G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, и будем считать, что V представляет собой неограниченный трехмерный объем. Применяя к получившемуся уравнению теорему о свертке функций и учитывая соотношение $\tilde{\varepsilon}_{mn}^* = \varepsilon_{mn}^* g(\mathbf{x})$, формулу (6) и равенство $\varepsilon_{pq} = e_{pq} - \varepsilon_{pq}^* g(\mathbf{x})$, получаем:

$$\hat{u}_p(\mathbf{k}) = -i k_l C_{jlmn} \varepsilon_{mn}^* \hat{g} \hat{G}_{pj}, \quad (8a)$$

$$\varepsilon_{pq}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2}(k_q \hat{u}_p + k_p \hat{u}_q) - \varepsilon_{pq}^* \hat{g}. \quad (8b)$$

Из определения функции $g(\mathbf{x})$ (равной 1 в области Ω и 0 вне ее) следует, что выражение для Фурье-образа этой функции $\hat{g}(\mathbf{k})$ имеет вид: $\hat{g}(\mathbf{k}) = \int_{\Omega} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}$. Теперь перемещения u_p и упругие деформации ε_{pq} находятся с помощью обратного преобразования Фурье и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_p(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_k} \hat{u}_p(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} dV_k', \\ \varepsilon_{pq}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_k} \varepsilon_{pq}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} dV_k'. \end{aligned} \quad (9)$$

В формулах (9) dV_k' – элемент объема Фурье пространства, а интегрирование проводится по всему бесконечному объему V_k этого пространства.

Для изотропной бесконечной среды имеем [72]:

$$C_{jlmn} = \lambda \delta_{jl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{jn} \delta_{lm}), \quad (10)$$

$$\hat{G}_{ij} = \frac{(\lambda + 2\mu)k^2 \delta_{ij} - (\lambda + \mu)k_i k_j}{\mu(\lambda + 2\mu)k^4}, \quad (11)$$

где $\lambda = 2\nu\mu / (1 - 2\nu)$, а $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$.

Для бесконечного кристалла с кубической симметрией, характеризуемого тремя упругими модулями c_{11} , c_{12} и c_{44} , тензор упругих модулей и тензор Грина рассчитываются по формулам [40,72]

$$C_{ijkl} = c_{12} \delta_{ij} \delta_{kl} + c_{44} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + c_{an} \delta_{ijkl}, \quad (12)$$

$$\hat{G}_{ij}(k) = \frac{\delta_{ij}}{c_{44}k^2 + c_{an}k_i^2} - \frac{(c_{12} + c_{44})k_i k_j}{(c_{44}k^2 + c_{an}k_i^2)(c_{44}k^2 + c_{an}k_j^2)} \times \left\{ 1 + (c_{12} + c_{44}) \sum_{p=1}^3 \frac{k_p^2}{c_{44}k^2 + c_{an}k_p^2} \right\}^{-1}, \quad (13)$$

где $\delta_{ijkl} = 1$ при $i = j = k = l$ и $\delta_{ijkl} = 0$ в противном случае, а $c_{an} = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$.

Таким образом, для заданной среды, характеризуемой тензором \hat{G}_{pq} , выражения для перемещений и упругих деформаций, создаваемые включениями различного размера и формы, рассчитываются единым образом по формулам (8) и (9). В этих формулах размер и форма включения, занимающего область Ω , учитываются только видом выражения для функции $\hat{g}(\mathbf{k})$.

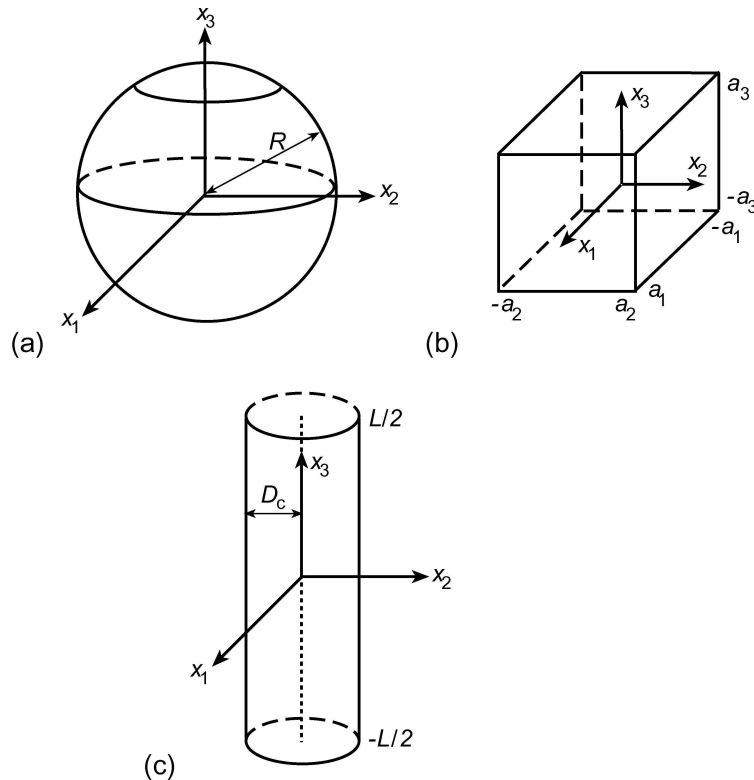


Рис. 1. Геометрия включений в кубическом кристалле. (а) Сферическое включение. (б) Кубическое включение. (с) Цилиндрическое включение конечной длины.

Недавно расчеты упругих деформаций, создаваемых включениями различной формы в бесконечных изотропных и кубических кристаллах с помощью формул (8b)–

(13) были проведены Андреевым с соавторами [40]. Для расчета деформаций, создаваемых включениями в кубических кристаллах, они также вычислили функции $\hat{g}(\mathbf{k})$ для различных форм включений: сферы, куба, пирамиды, усеченной пирамиды, полусферы и цилиндра конечной длины. Для включений с высокой степенью симметрии эти функции имеют довольно простой вид. Например, для сферического включения радиуса R , центр которого расположен в начале системы координат (x_1, x_2, x_3) (рис. 1а),

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi(\sin kR - kR \cos kR)}{k^3}. \quad (14)$$

Для кубического включения с центром в начале координат и сторонами с длинами a_1 , a_2 и a_3 , параллельными координатным осям x_1 , x_2 и x_3 соответственно (рис. 1б),

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \frac{8}{k_1 k_2 k_3} \sin(k_1 a_1 / 2) \sin(k_2 a_2 / 2) \sin(k_3 a_3 / 2). \quad (15)$$

Для цилиндрического включения длины L и диаметра D_c с центром в начале системы координат, ось x_3 которой совпадает с осью цилиндра,

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi D_c}{k_{\square} k_3} \sin(k_3 L / 2) J_1(D_c k_{\square} / 2), \quad (16)$$

где $k_{\square} = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$, а $J_1(t)$ – функция Бесселя 1 рода 1 порядка.

Простые формы включений, проанализированные Андреевым с соавторами [40], удобны для изучения влияния упругой анизотропии на упругие поля включений. Андреев с соавторами, в частности, показали [40], что в случае неоднородных кристаллов с кубической симметрией упругая анизотропия существенно влияет на деформации, создаваемые сферическим включением, но не оказывает существенного влияния на деформации, создаваемые кубическим или пирамидальным включением. Таким образом, влияние упругой анизотропии на упругие поля включений существенно только включений, форма которых близка к сферической. Однако по мере того, как форма включения становится меньше похожа на сферическую, влияние упругой анизотропии на упругие поля включений ослабевает.

В некоторых случаях использование Фурье-образов функций Грина оказывается удобно для расчета полей перемещений, деформаций и напряжений не только в бесконечных, но и в полубесконечных средах. Вместо трехмерного преобразования Фурье, используемого для расчета упругих полей включений в бесконечной среде, упругие поля включений в полупространстве можно рассчитывать с помощью двумерного преобразования Фурье в пространстве координат (x_1, x_2) . Метод расчетов при этом аналогичен расчетной схеме, применяемой для случая бесконечной среды, но требует знания двумерных Фурье-образов функций Грина для полупространства. Точные аналитические выражения для двумерных Фурье-образов функций Грина получены для полубесконечной среды с кубической симметрией [178] и использовались для расчетов упругого взаимодействия квантовых точек (наноскопических полупроводниковых включений) в полубесконечных кубических кристаллах [17, 183].

4. Интегрирование уравнений равновесия

В ряде простых задач о включениях их упругие поля можно получить, непосредственно

решая уравнения теории упругости в перемещениях. Такие уравнения получаются подстановкой в уравнения равновесия закона Гука, а также выражений, связывающих деформации и перемещения. Подобный подход был применен, в частности, для решения задачи о термических напряжениях, возникающих при контакте двух тел с различными коэффициентами термического расширения [72,184], а также для расчета напряжений, создаваемых в бесконечной среде цилиндрическим включением с дилатационной собственной деформацией [80]. В настоящем параграфе мы проиллюстрируем этот метод на примере задачи о напряжениях несоответствия в двухслойной цилиндрической нанопроволоке [128,129].

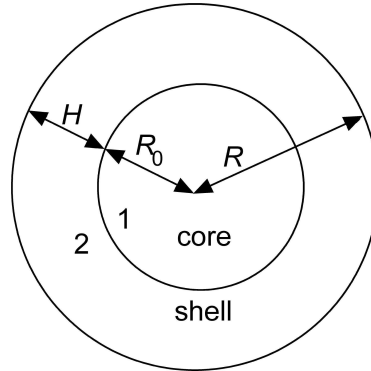


Рис. 2. Двухслойная цилиндрическая нанопроволока с несоответствием.

Рассмотрим двухслойную нанопроволоку радиуса R , состоящую из сплошного внутреннего слоя (ядра) радиуса R_0 и наружного слоя (оболочки) толщины H ($H = R - R_0$) (рис. 2). В рамках модели ядро и оболочка нанопроволоки являются упругоизотропными твердыми телами с равными модулями сдвига μ и коэффициентами Пуассона ν , но различными параметрами кристаллической решетки. Дилатационное несоответствие параметров a_c и a_s кристаллической решетки ядра и оболочки характеризуется параметром $f = 2(a_c - a_s) / (a_c + a_s)$ и создает в нанопроволоке упругие поля деформаций и напряжений.

Для расчета напряжений, действующих в двухслойной нанопроволоке с несоответствием (называемых далее напряжениями несоответствия) будем рассматривать нанопроволоку как бесконечный двухслойный цилиндр, в котором заданы собственные (неупругие) деформации. Пусть $\varepsilon_{ij}^{*(k)}$ – тензор собственных деформаций в k -ой области, где $k=1$ для ядра и $k=2$ для оболочки (рис. 3). Предположим, что $\varepsilon_{ij}^{*(2)} = 0$. Тогда $\varepsilon_{ij}^{*(1)} = f \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Суммарная деформация $e_{ij}^{(k)}$ в цилиндре состоит из собственной деформации $\varepsilon_{ij}^{*(k)}$ и упругой деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)}$:

$$e_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{*(k)} + \varepsilon_{ij}^{(k)}. \quad (17)$$

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) , ось z которой совпадает с осью цилиндра, компоненты тензора полной деформации выражаются через перемещения следующим образом [184]:

$$e_{rr}^{(k)} = \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{u_r^{(k)}}{r}, \quad e_{zz}^{(k)} = \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}. \quad (18)$$

Из симметрии задачи следует, что деформации $e_{zz}^{(k)}$ не зависят от координат r и z : $e_{zz}^{(k)} = C_k$ ($k=1,2$), где C_1 и C_2 – некоторые постоянные. Из условия равенства перемещений u_z на границе $r = R_0$ ($u_z^{(1)}(r = R_0) = u_z^{(2)}(r = R_0)$) получаем: $C_1 = C_2$.

Выражение для тензора напряжений несоответствия σ_{ij}^f (равных $\sigma_{ij}^{(1)}$ при $r < R_0$ и $\sigma_{ij}^{(2)}$ при $r > R_0$) получается теперь из закона Гука [184]:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij}^{(k)} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon^{(k)} \right), \quad (19)$$

где $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon_{ii}^{(k)}$. В цилиндрической системе координат компоненты тензора напряжений имеют следующий вид:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = 2\mu \left(e_{ij}^{(1)} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^{(1)} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} f \delta_{ij} \right), \quad (20a)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)} = 2G \left(e_{ij}^{(2)} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^{(2)} \right), \quad (20b)$$

где $e^{(k)} = e_{ii}^{(k)}$. Из условия равновесия [184]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad (21)$$

формул (18) и (20) и условия $\partial e_{zz}^{(k)} / \partial r = 0$ мы получаем следующее дифференциальное уравнение для перемещений:

$$\frac{d^2 u_r^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r^{(k)}}{dr} - \frac{u_r^{(k)}}{r^2} = 0. \quad (22)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_r^{(k)} = A_k r + \frac{B_k}{r}, \quad (23)$$

где A_k и B_k – некоторые постоянные. Постоянные A_k , B_k и C_1 определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}(r \rightarrow 0) & \text{ограничено,} \\ u_r^{(1)}(r = R_0) & = u_r^{(2)}(r = R_0), \\ \sigma_{rr}^{(1)}(r = R_0) & = \sigma_{rr}^{(2)}(r = R_0), \\ \sigma_{rr}^{(2)}(r = R) & = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

и условия равновесия $\int_S \sigma_{zz} dS' = 0$, где S – поперечное сечение нанопроволоки, а S' – параметр интегрирования. Решение системы (24) дает

$$\begin{aligned} A_1 & = \frac{f}{2(1-\nu)} (1+\nu + (1-3\nu)a^2), \quad B_1 = 0, \\ A_2 & = \frac{1-3\nu}{2(1-\nu)} fa^2, \quad B_2 = \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} fR_0^2, \quad C_1 = fa^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где $a = R_0 / R$. Напряжения несоответствия σ_{ij}^f получаются теперь из (18), (20), (23) и (25):

$$\sigma_{rr}^f = \sigma^* \left[(a^2 - 1) \Theta(R_0 - r) + (a^2 - R_0^2 / r^2) \Theta(r - R_0) \right], \quad (26a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^f = \sigma^* \left[(a^2 - 1) \Theta(R_0 - r) + (a^2 + R_0^2 / r^2) \Theta(r - R_0) \right], \quad (26b)$$

$$\sigma_{zz}^f = 2\sigma^* \left[(a^2 - 1) \Theta(R_0 - r) + a^2 \Theta(r - R_0) \right], \quad (26c)$$

где $\sigma^* = \mu f(1+\nu)/(1-\nu)$, а $\Theta(x)$ – функция Хэвисайда ($\Theta(x)=1$ при $x > 0$ и $\Theta(x)=0$ при $x < 0$).

Формулы (26) для поля напряжений двухслойной нанопроволоки с несоответствием использовались для расчета условий формирования различных дефектов несоответствия в такой нанопроволоке [110,128,129,185–188].

5. Метод поверхностных петель

В предыдущих параграфах мы рассмотрели методы, основанные на использовании тензорной функции Грина или прямом интегрировании уравнений равновесия. Альтернативой этим методам служит подход, основанный на концепции виртуальных поверхностных дислокаций. В общем виде этот метод был впервые сформулирован Кроупой и Лейчеком [125]. В основе этого метода лежит размещение на границе включения непрерывно распределенных виртуальных дислокаций и/или дислокационных петель. Если суммарный тензор собственных деформаций, создаваемых такими дефектами, равен тензору собственных деформаций, создаваемых включением, то перемещения, деформации и напряжения, создаваемые включением, равны суммам соответственно перемещений, деформаций и напряжений, создаваемых виртуальными поверхностными дислокациями и/или дислокационными петлями.

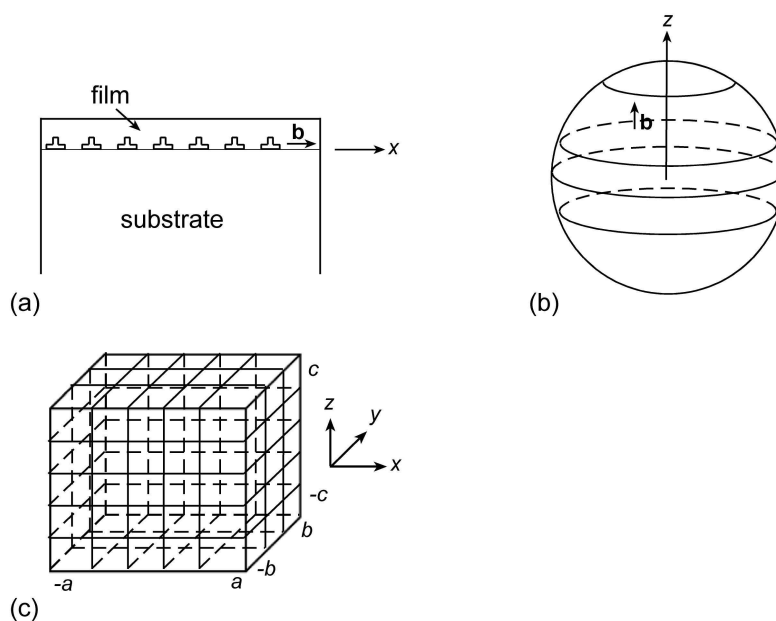


Рис. 3. Распределения дислокаций (a) и дислокационных петель (b,c), моделирующих собственные деформации включений в виде пленки на подложке (a), шара (b) и параллелепипеда (c).

Примеры распределений поверхностных дислокаций и дислокационных петель, моделирующих включения с дилатационной собственной деформацией, приведены на рис. 3. Рис. 3a иллюстрирует включение в виде пленки на подложке, характеризуемое единственной ненулевой компонентой собственной деформации $\varepsilon_{xx}^* = \varepsilon^*$. Собственная деформация такого включения моделируется ансамблем краевых дислокаций,

непрерывно распределенных по границе пленки и подложки с линейной плотностью ε^*/b , где b – величина их векторов Бюргера. На рис. 3б сферическое включение с одноосной собственной деформацией ε_{zz}^* моделируется непрерывным распределением круговых призматических дислокационных петель по поверхности сферы [81]. Наконец, на рис. 3с включение в форме прямоугольного параллелепипеда с трехосной дилатационной собственной деформацией $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon^* \delta_{ij}$ моделируется тремя ортогональными ансамблями призматических прямоугольных дислокационных петель, распределенных с линейной плотностью ε^*/b [110]. Для случая, когда такое включение расположено в изотропной бесконечной среде, поле его напряжений (равное суммарному полю напряжений распределенных по его поверхности дислокационных петель) имеет вид [110]:

$$\sigma_{ij}(x, y, z) = C \Phi_{ij}(x - x', y - y', z - z') \Big|_{x'_1=x_1}^{x'_2=x_2} \Big|_{y'_1=y_1}^{y'_2=y_2} \Big|_{z'_1=z_1}^{z'_2=z_2}, \quad (27)$$

где

$$\Phi_{xx} = \arctan \frac{\bar{x} R_1}{\bar{y} \bar{z}}, \quad \Phi_{yy} = \arctan \frac{\bar{y} R_1}{\bar{x} \bar{z}}, \quad \Phi_{zz} = \arctan \frac{\bar{z} R_1}{\bar{x} \bar{y}}, \quad (28)$$

$$\Phi_{xy} = -\ln(R_1 + \bar{z}), \quad \Phi_{xz} = -\ln(R_1 + \bar{y}), \quad \Phi_{yz} = -\ln(R_1 + \bar{x}), \quad (29)$$

$C = \mu \varepsilon^*(1+\nu)/[2\pi(1-\nu)]$, $\bar{x} = x - x'$, $\bar{y} = y - y'$, $\bar{z} = z - z'$, $R_1^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2$, а x_k, y_k, z_k ($k=1,2$) — координаты вершин параллелепипеда. Для включения, изображенного на рис. 3с, $x_1 = -a$, $x_2 = a$, $y_1 = -b$, $y_2 = b$, $z_1 = -c$ и $z_2 = c$.

6. Метод бесконечно малых включений

Рассмотренные в предыдущих параграфах метод функций Грина и метод поверхностных дислокационных петель основаны на построении решения для упругих полей включения заданной формы в виде суперпозиции известных базовых решений. Такой же подход используется и в методе бесконечно малых включений. В отличие от метода функций Грина и метода поверхностных дислокационных петель, в которых базовыми являются решения для упругих полей, создаваемых сосредоточенными силами, дислокациями или дислокационными петлями, в методе бесконечно малых включений базовыми являются решения для бесконечно малых включений. В рамках этого метода поля перемещений, деформаций и напряжений, создаваемых включением, представляются в виде суммы соответствующих полей, создаваемых бесконечно малыми включениями с тем же суммарным тензором собственной деформации. Если включение характеризуется чисто дилатационной собственной деформацией $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon^* \delta_{ij}$, упругие поля включения можно представить в виде суммы соответствующих полей, создаваемых центрами дилатации. Таким образом, существующие решения для центров дилатации в изотропной бесконечной среде, полупространстве [99], двухфазных средах [115,116] и пластине конечной толщины [126] позволяют получать решения для упругих полей однородных включений с дилатационной собственной деформацией, расположенных в таких средах. В качестве примера приведем решения для перемещений, создаваемых центром дилатации в изотропной полубесконечной среде. Пусть центр дилатации расположен в точке (x', y', z') изотропного полупространства $z \geq 0$ (рис. 4). Тогда создаваемое им поле перемещений $\mathbf{u}^*(x, y, z)$ имеет вид [99]

$$\mathbf{u}^*(x, y, z) = -P \left(\frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)\mathbf{R}_2}{R_2^3} - \frac{6z\hat{z}\mathbf{R}_2}{R_2^5} - \frac{2\mathbf{e}_z}{R_2^3} [(3-4\nu)\hat{z} - z] \right). \quad (30)$$

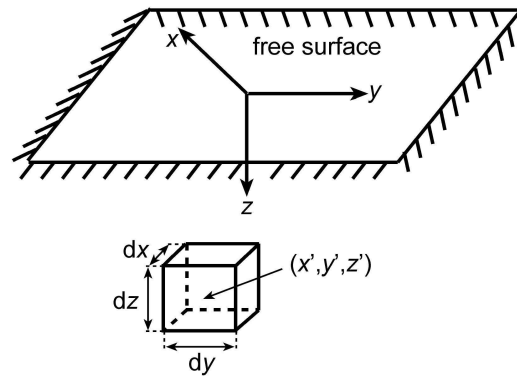


Рис. 4. Центр дилатации в изотропном полупространстве.

В формуле (30) $\mathbf{R}_1 = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\mathbf{R}_2 = (\bar{x}, \bar{y}, \hat{z})$, $\bar{x} = x - x'$, $\bar{y} = y - y'$, $\bar{z} = z - z'$, $\hat{z} = z + z'$, \mathbf{e}_z – единичный вектор направленный вдоль оси z , $R_{1,2}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + (z \mp z')^2$, $A = (1 + \nu) \varepsilon^* / [4\pi(1 - \nu)]$, $P = A dx dy dz$, $dx dy dz$ – объем центра дилатации.

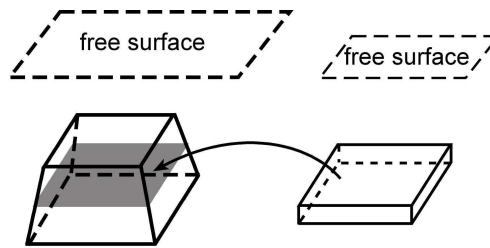


Рис. 5. Усеченная пирамида в полупространстве (а) и ее разложение на прямоугольные параллелепипеды бесконечно малой высоты (b).

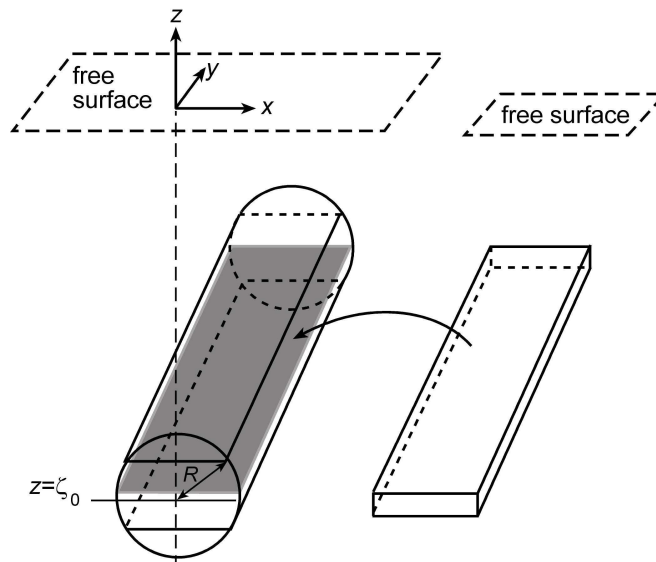


Рис. 6. Усеченный цилиндр в полупространстве (а) и его разложение на прямоугольные параллелепипеды бесконечно малой высоты (b).

Формула (30) для перемещений, создаваемых в полубесконечной изотропной среде центром дилатации, была использована в работе [107] для расчета напряжений, создаваемых включением в виде параллелепипеда вне этого включения. Эти напряжения рассчитывались в [107] посредством интегрирования поля напряжений, создаваемых центром дилатации, по объему параллелепипеда. Позднее выражения для

перемещений и деформаций, создаваемые включением в виде параллелепипеда в произвольной точке тела с таким включением, были получены Гласом [108]. Глас также применил полученное решение для расчета перемещений и деформаций, создаваемых в изотропном полубесконечном кристалле усеченной пирамидой [48] и цилиндром конечной длины [54] с дилатационной собственной деформацией $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon^* \delta_{ij}$ (рис. 5а). Для этого включения в виде усеченной пирамиды и цилиндра моделировались непрерывным распределением включений в виде параллелепипедов бесконечно малой толщины и переменного сечения (рис. 5b и 6b). Перемещения, создаваемые пирамидальным и цилиндрическим включениями, рассчитывались однократным интегрированием перемещений, создаваемых включениями в виде бесконечно тонких параллелепипедов. В общем случае полученные выражения для перемещений u_i^c и полных деформаций e_{ij}^c , создаваемых включениями в форме усеченной пирамиды и цилиндра конечной длины, весьма громоздки. Однако решение для цилиндрического включения существенно упрощается в случае, когда длина цилиндра становится бесконечной. В этом случае выражения для перемещений u_i^c и полных деформаций e_{ij}^c бесконечного цилиндрического включения имеют вид [54]:

$$u_x^c = Fx \left[- \left(\kappa_0 + \frac{4zz_{0+}}{Q_{1+}} \right) \frac{R^2}{Q_{1+}} + \Gamma^c(x, z) + \frac{R^2}{Q_{1-}} \bar{\Gamma}^c(x, z) \right], \quad (31a)$$

$$u_z^c = F \left[\left(\kappa_0 z_{0+} + \frac{2zQ_{2+}}{Q_{1+}} \right) \frac{R^2}{Q_{1+}} - z_{0-} \left(\Gamma^c(x, z) + \frac{R^2}{Q_{1-}} \bar{\Gamma}^c(x, z) \right) \right], \quad (31b)$$

$$e_{xx}^c(x, z) = F \left[\frac{R^2}{Q_{1+}} \left(\kappa_0 Q_{2+} + \frac{4zz_{0+}(3x^2 - z_{0+}^2)}{Q_{1+}} \right) + \Gamma^c(x, z) - \frac{R^2 Q_{2-}}{Q_{1-}^2} \bar{\Gamma}^c(x, z) \right], \quad (32a)$$

$$e_{zz}^c(x, z) = F \left[\frac{R^2}{Q_{1+}} \left((\kappa_0 + 2) Q_{2+} - \frac{4zz_{0+}(3x^2 - z_{0+}^2)}{Q_{1+}} \right) + \Gamma^c(x, z) + \frac{R^2 Q_{2-}}{Q_{1-}^2} \bar{\Gamma}^c(x, z) \right], \quad (32b)$$

$$e_{xz}^c(x, z) = 2FR^2 x \left[- \frac{1}{Q_{1+}^2} \left(z_{0+} + \frac{2z(x^2 - 3z_{0+}^2)}{Q_{1+}} \right) + \frac{z_{0-}}{Q_{1-}^2} \bar{\Gamma}^c(x, z) \right], \quad (32c)$$

где R – радиус цилиндра, $(x=0, z=\zeta_0)$ – координаты оси цилиндра, $\kappa_0 = 4\nu - 3$, $F = (1+\nu)\varepsilon^* / [2(1-\nu)]$, $z_{0\pm} = \zeta_0 \pm z$, $Q_{1\pm} = x^2 + z_{0\pm}^2$, $Q_{2\pm} = x^2 - z_{0\pm}^2$, $\Gamma_c = 1$ внутри цилиндра и $\Gamma_c = 0$ вне цилиндра, а $\bar{\Gamma}_c = 1 - \Gamma_c$.

7. Заключение

Таким образом, в настоящей работе дан краткий обзор решений для упругих полей включений в неоднородных твердых телах и описаны наиболее популярные методы расчета упругих полей таких включений: метод функций Грина, метод поверхностных дислокаций, решение уравнений равновесия и метод бесконечно малых включений. Показано, что, несмотря на малый размер включений в нанокompозитах, их упругие поля можно успешно рассчитывать в рамках теории упругости. Наличие большого количества решений для упругих полей включений в неоднородных твердых телах с различными геометрическими и упругими характеристиками дает возможность изучения упругого поведения широкого класса нанокompозитов. В то же время существуют различные методы, позволяющие получать новые решения для упругих полей нановключений на основе существующих базовых решений. Упругие поля,

действующие в нанокompозитах, можно также рассчитывать путем непосредственного решения граничных задач теории упругости.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 08-01-00225-а), программы Президиума РАН “Основы фундаментальных исследований нанотехнологий и наноматериалов”, РФФИ (грант 08-01-00225-а) и Правительства Санкт-Петербурга.

Литература

- [1] S. Link, M.A. El-Sayed // *Annu. Rev. Phys. Chem.* **54** (2003) 331.
- [2] S. Veprec // *Rev. Adv. Mater. Sci.* **5** (2003) 6.
- [3] D. Vollath, D.V. Szabo // *Adv. Eng. Mater.* **6** (2004) 117.
- [4] F. Yi-Si, Y. Ri-Sheng, Z. Li-De // *Chinese Phys. Lett.* **21** (2004) 1374.
- [5] E.T. Thostenson, C. Li, T.-W. Chou // *Composites Science and Technology* **65** (2005) 491.
- [6] C. Lu, Y.W. Mai, Y.G. Shen // *J. Mater. Sci.* **41** (2006) 937.
- [7] C.C. Koch, I.A.Ovid’ko, S. Seal, S. Veprek, *Structural nanocrystalline materials: fundamentals and applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [8] A. Mukhopadhyay, B. Basu // *Int. Mater. Rev.* **52** (2007) 257.
- [9] F. He, Q. Han, M.J. Jackson // *International Journal of Nanoparticles* **1** (2008) 301.
- [10] R.F. Gibson // *Composite structures* **92** (2010) 2793.
- [11] H. Hu, L. Onyebueke, A. Abatan // *Journal of Minerals & Materials Characterization & Engineering* **9** (2010) 275.
- [12] J. Bernholc, D. Brenner, M.B. Nardelli, V. Meunier, C. Roland // *Annu. Rev. Mater. Res.* **32** (2002) 347.
- [13] L. Ci, J. Suhr, V. Pushparaj, X. Zhang, P.M. Ajayan // *Nano Lett.* **8** (2008) 2762.
- [14] Y. Sun, Q. Chen // *Appl. Phys. Lett.* **95** (2009) 021901.
- [15] S.C. Tjong, *Carbon nanotube reinforced composites: metal and ceramic matrices* (Wiley, 2009).
- [16] N.N. Ledentsov, V.M. Ustinov, V.A. Shchukin, P.S. Kop’ev, Zh.I. Alferov, D. Bimberg // *Semiconductors* **32** (1998) 343.
- [17] V.A. Shchukin, D. Bimberg // *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999) 1125.
- [18] C. Teichert // *Phys. Rep.* **365** (2002) 335.
- [19] N.N. Ledentsov, D. Bimberg // *J. Cryst. Growth* **255** (2003) 68.
- [20] V.A. Shchukin, N.N. Ledentsov, D. Bimberg, *Epitaxy of Nanostructures* (Springer, Heidelberg, 2003).
- [21] *Lateral alignment of epitaxial quantum dots*, ed. by G. Schmidt (Springer, Berlin, Heidelberg, 2007).
- [22] M. Buljan, I. Bogdanović-Radović, M. Karlusić, U.V. Desnica, N. Radić, N. Skukan, G. Džazić, M. Ivanda, O. Gamulin, Z. Matej, V. Vales, J. Grenzer, T.W. Cornelius, H.T. Metzger, V. Holý // *Phys. Rev. B* **81** (2010) 085321.
- [23] W.L. Henstrom, C.-P. Liu, J.M. Gibson, T.I. Kamins, R.S. Williams // *Appl. Phys. Lett.* **77** (2000) 1623.
- [24] X.Z. Liao, J. Zou, D.J.H. Cockayne, J. Qin, Z.M. Jiang, X. Wang, R. Leon // *Phys. Rev. B* **60** (1999) 15605.
- [25] F. Boscherini, G. Capellini, L. Di Gaspare, F. Rosai, N. Motta, S. Mobilio // *Appl. Phys. Lett.* **76** (2000) 682.
- [26] I. Kegel, T.H. Metzger, A. Lorke, J. Peisl, J. Stangl, G. Bauer, J.M. García, P.M. Petroff // *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 1694.

- [27] N. Liu, J. Tersoff, O. Baklenov, A.L. Holmes, Jr., C.K. Shih // *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 334.
- [28] O.G. Schmidt, K. Eberl // *Phys. Rev. B* **61** (2000) 13721.
- [29] G. Capellini, M. De Seta, F. Evangelisti // *Appl. Phys. Lett.* **78** (2001) 303.
- [30] J.H. Seok, J.Y. Kim // *Appl. Phys. Lett.* **78** (2001) 3124.
- [31] I. Kegel, T.H. Metzger, A. Lorke, J. Peisl, J. Stangl, G. Bauer, K. Nordlund, W.V. Schoenfeld, P.M. Petroff // *Phys. Rev. B* **63** (2001) 035318.
- [32] X.Z. Liao, J. Zou, D.J.H. Cockayne, J. Wan, Z.M. Jiang, G. Jin, K.L. Wang // *Phys. Rev. B* **65** (2002) 153306.
- [33] Ph. Sonnet, P.C. Kelires // *Phys. Rev. B* **66** (2002) 205307.
- [34] Y. Zhang, M. Floyd, K.P. Driver, J. Drucker, P.A. Crozier, D.J. Smith // *Appl. Phys. Lett.* **80** (2002) 3623.
- [35] M. Grundmann, O. Stier, D. Bimberg // *Phys. Rev. B* **52** (1995) 11969.
- [36] Q. Xie, A. Madhukar, P. Chen, N.P. Kobayashi // *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 2543.
- [37] T. Benabbas, F. Francois, Y. Androussi, A. Lefebvre // *J. Appl. Phys.* **80** (1996) 2763.
- [38] D.A. Faux, J.R. Downes, E.P. O'Reilly // *J. Appl. Phys.* **82** (1997) 3754.
- [39] C. Pryor, J. Kim, L.W. Wang, A.J. Williamson, A. Zunger // *J. Appl. Phys.* **83** (1998) 2548.
- [40] A.D. Andreev, J.R. Downes, D.A. Faux, E.P. O'Reilly // *J. Appl. Phys.* **86** (1999) 297.
- [41] V. Holý, G. Springholz, M. Pinczolits, G. Bauer // *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 356.
- [42] G.S. Pearson, D.A. Faux // *J. Appl. Phys.* **88** (2000) 730.
- [43] G. Springholz, M. Pinczolits, P. Mayer, V. Holy, G. Bauer, H.H. Kang, L. Salamanca-Riba // *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 4669.
- [44] G. Springholz, M. Pinczolits, V. Holy, S. Zerlauth, I. Vavra, G. Bauer // *Physica E* **9** (2001) 149.
- [45] B. Jogai // *J. Appl. Phys.* **88** (2000) 5050.
- [46] G. Muralidharan // *Jpn. J. Appl. Phys.*, part 2, **39** (2000) L658.
- [47] A.E. Romanov, G.E. Beltz, W.T. Fischer, P.M. Petroff, J.S. Speck // *J. Appl. Phys.* **89** (2001) 4523.
- [48] F. Glas // *J. Appl. Phys.* **90** (2001) 3232.
- [49] F. Glas // *Appl. Surf. Sci.* **388** (2002) 9.
- [50] F. Glas // *Phil. Mag. A* **82** (2002) 2591.
- [51] M. Tadić, F.M. Peeters, K.L. Janssens, M. Korkusiski, P. Hawrylak // *J. Appl. Phys.* **92** (2002) 5819.
- [52] M. Tadić, F.M. Peeters, K.L. Janssens // *Phys. Rev. B* **65** (2002) 165333.
- [53] B. Yang, E. Pan // *J. Appl. Phys.* **92** (2002) 3084.
- [54] F. Glas // *Phys. Stat. Sol. (b)* **237** (2003) 599.
- [55] C. Priester // *Phys. Rev. B* **63** (2001) 153303.
- [56] H.X. Zhong, J.C. Wells, Q. Niu, Z.Y. Zhang // *Surf. Sci.* **539** (2003) L525.
- [57] P. Liu, Y.W. Zhang, C. Lu // *Phys. Rev. B* **68** (2003) 195314.
- [58] Q.X. Pei, C. Lu, Y.Y. Wang // *J. Appl. Phys.* **93** (2003) 1487.
- [59] B. Yang, V.K. Tewary // *Phys. Rev. B* **68** (2003) 035301.
- [60] V.M. Kaganer, B. Jenichen, G. Paris, K.H. Ploog, O. Kononov, P. Mikulík, S. Arai // *Phys. Rev. B* **66** (2002) 035310.
- [61] E. Bachlechner, A. Omeltchenko, A. Nakano, R.K. Kalia, I. Ebbsjö, A. Madhukar, P. Messina // *Appl. Phys. Lett.* **72** (1998) 1969.
- [62] M.A. Cusack, P.R. Briddon, M. Jaros // *Phys. Rev. B* **56** (1997) 4047.
- [63] O. Stier, M. Grundmann, D. Bimberg // *Phys. Rev. B* **59** (1999) 5688.
- [64] L.-W. Wang, J. Kim, A. Zunger // *Phys. Rev. B* **59** (1999) 5678.
- [65] Y. Kikuchi, H. Sugii, K. Shintani // *J. Appl. Phys.* **89** (2001) 1191.

- [66] M.A. Makeev, W. Yu, A. Madhukar // Phys. Rev. B **68** (2003) 195301.
- [67] M.A. Makeev, A. Madhukar // Phys. Rev. B **67** (2003) 073201.
- [68] M.A. Makeev, A. Madhukar // Phys. Rev. Lett. **56** (2001) 5542.
- [69] M.A. Migliorato, A.G. Cullis, M. Fearn, J.H. Jefferson // Phys. Rev. B **65** (2002) 115316.
- [70] C. Kohler // J. Phys.: Condens. Matter **15** (2003) 133.
- [71] A.V. Nenashev, A.V. Dvurechenskii // JETP **118** (2000) 497.
- [72] T. Mura, *Micromechanics of Defects in Solids* (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht-Boston-Lancaster, 1987).
- [73] J.N. Goodier // Phil. Mag. **23** (1937) 1017.
- [74] N.O. Micklestad // J. Appl. Mech. **9** (1942) A136.
- [75] R.H. Edward // J. Appl. Mech. **18** (1951) 19.
- [76] J.D. Eshelby // Proc. R. Soc. London A **241** (1957) 376.
- [77] J.D. Eshelby // Proc. R. Soc. London A **252** (1959) 561.
- [78] J.D. Eshelby, In: *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 2, ed. by I.N. Sneddon, R. Hill (North-Holland, Amsterdam, 1961), p. 89.
- [79] Дж. Эшелби, в книге *Континуальная теория дислокаций* (Иностранная литература, М., 1963).
- [80] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko // Eur. Phys. J. B **1** (1998) 429.
- [81] N.A. Bert, A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov, V.V. Chaldyshev // Phys. Solid State **44** (2002) 2240.
- [82] A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov // Int. J. Sol. Structures **47** (2010) 58.
- [83] L.Z. Wu, S.Y. Du // Proc. R. Soc. London A **455** (1999) 879.
- [84] H. Hasegawa, V.G. Lee, T. Mura // J. Appl. Mech. **59** (1992) 107.
- [85] W. Nowacki, *Thermoelasticity* (Pergamon, New York, 1962).
- [86] V.I. Lawrenuk // Izv. AN SSSR, Mechan. Tverd. Tela N 3 (1979) 63 (in Russian).
- [87] Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно, *Термоупругость тел неоднородной структуры* (Наука, М., 1984).
- [88] S.L. Sass, T. Mura, J.B. Cohen // Phil. Mag. **16** (1967) 679.
- [89] G. Faivre // Phys. Stat. Sol. **35** (1969) 249.
- [90] R. Sankaran, C. Laird // J. Mech. Phys. Solids **24** (1976) 251.
- [91] Y.P. Chiu // J. Appl. Mech. **44** (1977) 587.
- [92] T.J. Gosling, J.R. Willis // J. Appl. Phys. **77** (1995) 5601.
- [93] G.J. Rodin // J. Mech. Phys. Solids **44** (1996) 1977.
- [94] J.R. Downes, D.A. Faux, E.P. O'Reilly // J. Appl. Phys. **81** (1997) 6700.
- [95] H. Nozaki, M. Taya // J. Appl. Mech. **64** (1997) 495.
- [96] T. Mura // Mech. Res. Commun. **24** (1997) 473.
- [97] T. Mura // Mater. Sci. Engng. A **285** (2000) 224.
- [98] H. Nozaki, N. Taya // J. Appl. Mech. **68** (2001) 441.
- [99] R.D. Mindlin, D.H. Cheng // J. Appl. Phys. **21** (1950) 931.
- [100] K. Aderogba // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **80** (1976) 555.
- [101] K. Seo, T. Mura // J. Appl. Mech. **46** (1979) 568.
- [102] H.Y. Yu, S.C. Sanday // J. Appl. Mech. **57** (1990) 74.
- [103] A.A. Maradulin, R.F. Wallis // Surf. Sci. **91** (1980) 423.
- [104] F. Loges, B. Michel, A. Christ // Z. Angew. Math. Mech. **83** (1985) 65.
- [105] L.Z. Wu // Acta Mech. Sinica **19** (2003) 253.
- [106] Y.P. Chiu // J. Appl. Mech. **45** (1978) 302.
- [107] S.M. Hu // J. Appl. Phys. **66** (1989) 2741.
- [108] F. Glas // J. Appl. Phys. **70** (1991) 3556.

- [109] К.Л. Малышев, М.Ю. Гуткин, А.Е. Романов, А.А. Ситникова, Л.М. Сорокин // Препринт Физико-технического института РАН им. А.Ф. Иоффе N 1109 (Л., 1987).
- [110] М.Ю. Гуткин, И.А. Овидько. Физическая механика деформируемых наноструктур. Т. II. Нанослойные структуры (СПб, Янус, 2005). С. 68.
- [111] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman // J. Phys.: Condens. Matter **15** (2003) 3539.
- [112] H. Hasegawa, R.H. Liang, T. Mura // J. Thermal Stresses **15** (1992) 295.
- [113] H. Hasegawa, V.G. Lee, T. Mura // J. Appl. Mech. **60** (1993) 33.
- [114] L.Z. Wu, S.Y. Du // J. Appl. Mech. **63** (1996) 925.
- [115] J. Dundurs, D.N. Guell // Proc. 2nd South Western Conf. Theoret. and Appl. Mech. Devel. in Theoret. and Appl. Mech. **2** (1965) 199.
- [116] D.L. Guell, J. Dundurs: // Devel. in Theoret. and Appl. Mech. **3** (1967) 105.
- [117] K. Aderogba // Phil. Mag **35** (1977) 281.
- [118] H.Y. Yu, S.C. Sanday // Proc. R. Soc. London A **434** (1991) 503.
- [119] R.D. Mindlin // Physics **7** (1936) 195.
- [120] H.Y. Yu, S.C. Sanday // Proc. R. Soc. London A **434** (1991) 521.
- [121] L.J. Walpole // J. Appl. Mech. **59** (1997) 193.
- [122] A.M. Korsunsky // J. Appl. Mech. **64** (1997) 697.
- [123] C.Q. Ru, P. Schiavone, A. Mioduchowski // Z. Angew. Math. Phys. **52** (2001) 18.
- [124] Y.F. Sun, Y.Z. Peng // Appl. Math. Comput. **140** (2003) 105.
- [125] F. Kroupa, L. Lejček // Czech. J. Phys. B **20** (1970) 1063.
- [126] H.Y. Yu, S.C. Sanday // Proc. R. Soc. London A **438** (1992) 103.
- [127] T. Chang, W. Guo, H.R. Dong // J. Strain Anal. Eng. **36** (2001) 277.
- [128] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman // J. Phys.: Condens. Matter **12** (2000) 5391.
- [129] K.E. Aifantis, A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov // Philos. Mag. **87** (2007) 4731.
- [130] M.A. Jaswon, R.D. Bhargava // Proc. Camb. Phil. Soc. **57** (1961) 669.
- [131] R.D. List // Proc. Camb. Phil. Soc. **65** (1969) 823.
- [132] J.R. Willis // Q. J. Mech. Appl. Math. **17** (1964) 157.
- [133] R.D. Bhargava, H.C. Radhakrishna // Proc. Camb. Phil. Soc. **59** (1963) 821.
- [134] R.D. Bhargava, H.C. Radhakrishna // J. Phys. Soc. Japan **19** (1964) 396.
- [135] W.T. Chen // Q. J. Mech. Appl. Math. **20** (1967) 307.
- [136] R.J. Asaro, D.M. Barnett // J. Mech. Phys. Solids **23** (1975) 77.
- [137] И.А. Кунин, Э.Г. Соснина // Докл. АН СССР **199** (1971) 571.
- [138] H.C. Yang, Y.T. Chou // J. Appl. Mech. **43** (1976) 424.
- [139] H.C. Yang, Y.T. Chou // J. Appl. Mech. **44** (1977) 437.
- [140] R.A. Masumura, Y.T. Chou // J. Appl. Mech. **49** (1982) 52.
- [141] H.T. Zhang, Y.T. Chou // J. Appl. Mech. **52** (1985) 87.
- [142] C.Q. Ru // Acta Mech. **160** (2003) 219.
- [143] P. Sharma, S. Ganti // Phys. Status Solidi B **234** (2002) R10.
- [144] P. Sharma, S. Ganti, N. Bhate // Appl. Phys. Lett. **82** (2003) 535.
- [145] L.H. He, C.W. Lim, B.S. Wu // Int. J. Solids Struct. **41** (2004) 847.
- [146] P. Sharma, S. Ganti // J. Appl. Mech. **71** (2004) 663.
- [147] H. Duan, J. Wang, Z. Huang, Z. Luo // Mech. Mater. **37** (2005) 723.
- [148] L.H. He, Z.R. Li // Int. J. Solids Struct. **43** (2006) 6208.
- [149] C.W. Lim, Z.R. Li, L.H. He // Int. J. Solids Struct. **43** (2006) 5055.
- [150] R. Maranganti, P. Sharma, In: *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology*, ed. by M. Rieth and W. Schommers (American Scientific Publ., 2006). Vol. 1, p. 1.
- [151] C. Mi, D.A. Kouris // J. Mech. Mater. Struct. **1** (2006) 763.

- [152] D.A. Kouris, C. Mi // *Surf. Sci.* **601** (2007) 757.
- [153] C. Mi, D.A. Kouris // *JSME Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering* **1** (2007) 1219.
- [154] P. Sharma, L.T. Wheeler // *J. Appl. Mech.* **74** (2007) 447.
- [155] C. Mi, D.A. Kouris // *Theoret. Appl. Mech.* **35** (2008) 267.
- [156] H.J. Chu, H.L. Duan, J. Wang, B.L. Karihaloo, In: *IUTAM Symposium on Modelling Nanomaterials and Nanosystems*, ed. by R. Pyrz and J.C. Rauhe (Springer, 2009), p. 181.
- [157] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch // *Archives for Rational Mechanics and Analysis* **57** (1975) 291; **59** (1975) 389.
- [158] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch // *Int. J. Solids Struct.* **14** (1978) 431.
- [159] M. E. Gurtin, J. Weissmüller, F. Larché // *Phil. Mag. A* **78** (1998) 1093.
- [160] E. Kröner, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Einenspannungen* (Springer, 1958).
- [161] Lord Kelvin, In: *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge University Press, 1882), Vol. 1, p. 97.
- [162] E. Mann, R. von Jan, A. Seeger // *Phys. Stat. Sol.* **1** (1961) 17.
- [163] K.H.C. Lie, J.S. Koehler // *Adv. Phys.* **17** (1968) 421.
- [164] H. Bross // *Phys. Stat. Sol.* **5** (1964) 329.
- [165] D.M. Barnett // *Phys. Stat. Sol. (b)* **49** (1972) 741.
- [166] J.W. Deutz, H.R. Schober // *Comp. Phys. Comm. (Netherlands)* **30** (1983) 87.
- [167] S.A. Gunderson, J. Lothe // *Phys. Stat. Sol. (b)* **143** (1987) 73.
- [168] C.Y. Wang, J.D. Achenbach // *Wave Motion* **18** (1993) 273.
- [169] C.Y. Wang // *Int. J. Solids and Struct.* **31** (1994) 2591.
- [170] Y. Hisada // *Bull. Seismolog. Soc. Am.* **85** (1995) 1525.
- [171] T.C.T. Ting // *Q. J. Mech. Appl. Math.* **49** (1996) 1.
- [172] T.C.T. Ting, V.G. Lee // *Q. J. Mech. Appl. Math.* **50** (1997) 407.
- [173] E. Pan // *Appl. Math. Modell.* **21** (1997) 509.
- [174] C.Y. Wang // *J. Eng. Math.* **32** (1997) 41.
- [175] D.A. Faux, G.S. Pearson // *Phys. Rev. B* **62** (2000) R4798.
- [176] E. Pan, F.G. Yuan // *Int. J. Solids Struct.* **37** (2000) 5329.
- [177] V.K. Tewary // *J. Eng. Math.* **49** (2004) 289.
- [178] K. Portz, A.A. Maradulin // *Phys. Rev. B* **16** (1977) 3535.
- [179] K.P. Walker // *Proc. R. Soc. London A* **443** (1993) 367.
- [180] E. Pan // *J. Appl. Mech.-Trans. ASME* **70** (2003) 101.
- [181] L. Rongved // *Proc. 2nd Midwestern Conf. Solid Mech.*(1955) 1.
- [182] J. Dundurs, M. Hetényi // *J. Appl. Mech.* **32** (1965) 671.
- [183] V.A. Shchukin, D. Bimberg, V.G. Malyshkin, N.N. Ledentsov // *Phys. Rev. B* **57** (1998) 12262.
- [184] С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер, *Теория упругости* (Наука, М., 1979).
- [185] A.G. Sheinerman, M.Yu. Gutkin // *Phys. Stat. Sol. (a)* **184** (2001) 485.
- [186] I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman // *Phil. Mag.* **84** (2004) 2103.
- [187] И.А. Овидько, А.Г. Шейнерман, *Наномеханика квантовых точек и проволок* (Янус, СПб, 2004).
- [188] I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman // *Adv. Phys.* **55** (2006) 627.

ELASTIC FIELDS OF NANOSCOPIC INCLUSIONS IN NANOCOMPOSITES**I.A. Ovid'ko*, A.G. Sheinerman**

Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,
Bolshoj 61, Vasil. Ostrov, St. Petersburg 199178, Russia

* Email: ovidko@nano.ipme.ru

Abstract. An overview of the analytical solutions for the elastic fields of nanoinclusions in composite solids is given. Special attention is paid to the case of nanocomposites. Besides, a description of the most popular analytical procedures for the calculations of the elastic fields of inclusions in nanocomposites is provided. These procedures include the Green function method, the method of surface dislocation loops, integration of the equations of equilibrium, and the method of infinitesimal inclusions. Also, the solutions for the elastic fields of nanoinclusions, derived within linear elasticity, are discussed and compared with those obtained using atomistic simulations. It is shown that the linear elasticity approach is valid down to extremely small dimensions of nanoinclusions.

References

- [1] S. Link, M.A. El-Sayed // *Annu. Rev. Phys. Chem.* **54** (2003) 331.
- [2] S. Vepric // *Rev. Adv. Mater. Sci.* **5** (2003) 6.
- [3] D. Vollath, D.V. Szabo // *Adv. Eng. Mater.* **6** (2004) 117.
- [4] F. Yi-Si, Y. Ri-Sheng, Z. Li-De // *Chinese Phys. Lett.* **21** (2004) 1374.
- [5] E.T. Thostenson, C. Li, T.-W. Chou // *Composites Science and Technology* **65** (2005) 491.
- [6] C. Lu, Y.W. Mai, Y.G. Shen // *J. Mater. Sci.* **41** (2006) 937.
- [7] C.C. Koch, I.A.Ovid'ko, S. Seal, S. Vepric, *Structural nanocrystalline materials: fundamentals and applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [8] A. Mukhopadhyay, B. Basu // *Int. Mater. Rev.* **52** (2007) 257.
- [9] F. He, Q. Han, M.J. Jackson // *International Journal of Nanoparticles* **1** (2008) 301.
- [10] R.F. Gibson // *Composite structures* **92** (2010) 2793.
- [11] H. Hu, L. Onyebueke, A. Abatan // *Journal of Minerals & Materials Characterization & Engineering* **9** (2010) 275.
- [12] J. Bernholc, D. Brenner, M.B. Nardelli, V. Meunier, C. Roland // *Annu. Rev. Mater. Res.* **32** (2002) 347.
- [13] L. Ci, J. Suhr, V. Pushparaj, X. Zhang, P.M. Ajayan // *Nano Lett.* **8** (2008) 2762.
- [14] Y. Sun, Q. Chen // *Appl. Phys. Lett.* **95** (2009) 021901.
- [15] S.C. Tjong, *Carbon nanotube reinforced composites: metal and ceramic matrices* (Wiley, 2009).
- [16] N.N. Ledentsov, V.M. Ustinov, V.A. Shchukin, P.S. Kop'ev, Zh.I. Alferov, D. Bimberg // *Semiconductors* **32** (1998) 343.
- [17] V.A. Shchukin, D. Bimberg // *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999) 1125.
- [18] C. Teichert // *Phys. Rep.* **365** (2002) 335.
- [19] N.N. Ledentsov, D. Bimberg // *J. Cryst. Growth* **255** (2003) 68.

- [20] V.A. Shchukin, N.N. Ledentsov, D. Bimberg, *Epitaxy of Nanostructures* (Springer, Heidelberg, 2003).
- [21] *Lateral alignment of epitaxial quantum dots*, ed. by G. Schmidt (Springer, Berlin, Heidelberg, 2007).
- [22] M. Buljan, I. Bogdanović-Radović, M. Karlusić, U.V. Desnica, N. Radić, N. Skukan, G. Dražić, M. Ivanda, O. Gamulin, Z. Matej, V. Vales, J. Grenzer, T.W. Cornelius, H.T. Metzger, V. Holý // *Phys. Rev. B* **81** (2010) 085321.
- [23] W.L. Henstrom, C.-P. Liu, J.M. Gibson, T.I. Kamins, R.S. Williams // *Appl. Phys. Lett.* **77** (2000) 1623.
- [24] X.Z. Liao, J. Zou, D.J.H. Cockayne, J. Qin, Z.M. Jiang, X. Wang, R. Leon // *Phys. Rev. B* **60** (1999) 15605.
- [25] F. Boscherini, G. Capellini, L. Di Gaspare, F. Rosai, N. Motta, S. Mobilio // *Appl. Phys. Lett.* **76** (2000) 682.
- [26] I. Kegel, T.H. Metzger, A. Lorke, J. Peisl, J. Stangl, G. Bauer, J.M. García, P.M. Petroff // *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 1694.
- [27] N. Liu, J. Tersoff, O. Baklenov, A.L. Holmes, Jr., C.K. Shih // *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 334.
- [28] O.G. Schmidt, K. Eberl // *Phys. Rev. B* **61** (2000) 13721.
- [29] G. Capellini, M. De Seta, F. Evangelisti // *Appl. Phys. Lett.* **78** (2001) 303.
- [30] J.H. Seok, J.Y. Kim // *Appl. Phys. Lett.* **78** (2001) 3124.
- [31] I. Kegel, T.H. Metzger, A. Lorke, J. Peisl, J. Stangl, G. Bauer, K. Nordlund, W.V. Schoenfeld, P.M. Petroff // *Phys. Rev. B* **63** (2001) 035318.
- [32] X.Z. Liao, J. Zou, D.J.H. Cockayne, J. Wan, Z.M. Jiang, G. Jin, K.L. Wang // *Phys. Rev. B* **65** (2002) 153306.
- [33] Ph. Sonnet, P.C. Kelires // *Phys. Rev. B* **66** (2002) 205307.
- [34] Y. Zhang, M. Floyd, K.P. Driver, J. Drucker, P.A. Crozier, D.J. Smith // *Appl. Phys. Lett.* **80** (2002) 3623.
- [35] M. Grundmann, O. Stier, D. Bimberg // *Phys. Rev. B* **52** (1995) 11969.
- [36] Q. Xie, A. Madhukar, P. Chen, N.P. Kobayashi // *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 2543.
- [37] T. Benabbas, F. Francois, Y. Androussi, A. Lefebvre // *J. Appl. Phys.* **80** (1996) 2763.
- [38] D.A. Faux, J.R. Downes, E.P. O'Reilly // *J. Appl. Phys.* **82** (1997) 3754.
- [39] C. Pryor, J. Kim, L.W. Wang, A.J. Williamson, A. Zunger // *J. Appl. Phys.* **83** (1998) 2548.
- [40] A.D. Andreev, J.R. Downes, D.A. Faux, E.P. O'Reilly // *J. Appl. Phys.* **86** (1999) 297.
- [41] V. Holý, G. Springholz, M. Pinczolits, G. Bauer // *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 356.
- [42] G.S. Pearson, D.A. Faux // *J. Appl. Phys.* **88** (2000) 730.
- [43] G. Springholz, M. Pinczolits, P. Mayer, V. Holy, G. Bauer, H.H. Kang, L. Salamanca-Riba // *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 4669.
- [44] G. Springholz, M. Pinczolits, V. Holy, S. Zerlauth, I. Vavra, G. Bauer // *Physica E* **9** (2001) 149.
- [45] B. Jogai // *J. Appl. Phys.* **88** (2000) 5050.
- [46] G. Muralidharan // *Jpn. J. Appl. Phys.*, part 2, **39** (2000) L658.
- [47] A.E. Romanov, G.E. Beltz, W.T. Fischer, P.M. Petroff, J.S. Speck // *J. Appl. Phys.* **89** (2001) 4523.
- [48] F. Glas // *J. Appl. Phys.* **90** (2001) 3232.
- [49] F. Glas // *Appl. Surf. Sci.* **388** (2002) 9.
- [50] F. Glas // *Phil. Mag. A* **82** (2002) 2591.
- [51] M. Tadić, F.M. Peeters, K.L. Janssens, M. Korkusiski, P. Hawrylak // *J. Appl. Phys.* **92** (2002) 5819.
- [52] M. Tadić, F.M. Peeters, K.L. Janssens // *Phys. Rev. B* **65** (2002) 165333.

- [53] B. Yang, E. Pan // *J. Appl. Phys.* **92** (2002) 3084.
- [54] F. Glas // *Phys. Stat. Sol. (b)* **237** (2003) 599.
- [55] C. Priester // *Phys. Rev. B* **63** (2001) 153303.
- [56] H.X. Zhong, J.C. Wells, Q. Niu, Z.Y. Zhang // *Surf. Sci.* **539** (2003) L525.
- [57] P. Liu, Y.W. Zhang, C. Lu // *Phys. Rev. B* **68** (2003) 195314.
- [58] Q.X. Pei, C. Lu, Y.Y. Wang // *J. Appl. Phys.* **93** (2003) 1487.
- [59] B. Yang, V.K. Tewary // *Phys. Rev. B* **68** (2003) 035301.
- [60] V.M. Kaganer, B. Jenichen, G. Paris, K.H. Ploog, O. Konovalov, P. Mikulík, S. Arai // *Phys. Rev. B* **66** (2002) 035310.
- [61] E. Bachlechner, A. Omeltchenko, A. Nakano, R.K. Kalia, I. Ebbsjö, A. Madhukar, P. Messina // *Appl. Phys. Lett.* **72** (1998) 1969.
- [62] M.A. Cusack, P.R. Briddon, M. Jaros // *Phys. Rev. B* **56** (1997) 4047.
- [63] O. Stier, M. Grundmann, D. Bimberg // *Phys. Rev. B* **59** (1999) 5688.
- [64] L.-W. Wang, J. Kim, A. Zunger // *Phys. Rev. B* **59** (1999) 5678.
- [65] Y. Kikuchi, H. Sugii, K. Shintani // *J. Appl. Phys.* **89** (2001) 1191.
- [66] M.A. Makeev, W. Yu, A. Madhukar // *Phys. Rev. B* **68** (2003) 195301.
- [67] M.A. Makeev, A. Madhukar // *Phys. Rev. B* **67** (2003) 073201.
- [68] M.A. Makeev, A. Madhukar // *Phys. Rev. Lett.* **56** (2001) 5542.
- [69] M.A. Migliorato, A.G. Cullis, M. Fearn, J.H. Jefferson // *Phys. Rev. B* **65** (2002) 115316.
- [70] C. Kohler // *J. Phys.: Condens. Matter* **15** (2003) 133.
- [71] A.V. Nenashev, A.V. Dvurechenskii // *JETP* **118** (2000) 497.
- [72] T. Mura, *Micromechanics of Defects in Solids* (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht-Boston-Lancaster, 1987).
- [73] J.N. Goodier // *Phil. Mag.* **23** (1937) 1017.
- [74] N.O. Micklestad // *J. Appl. Mech.* **9** (1942) A136.
- [75] R.H. Edward // *J. Appl. Mech.* **18** (1951) 19.
- [76] J.D. Eshelby // *Proc. R. Soc. London A* **241** (1957) 376.
- [77] J.D. Eshelby // *Proc. R. Soc. London A* **252** (1959) 561.
- [78] J.D. Eshelby, In: *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 2, ed. by I.N. Sneddon, R. Hill (North-Holland, Amsterdam, 1961), p. 89.
- [79] J. Eshelby, In: *Continuum theory of dislocations* (Inostrannaya Literatura, Moscow, 1963), in Russian.
- [80] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko // *Eur. Phys. J. B* **1** (1998) 429.
- [81] N.A. Bert, A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov, V.V. Chaldyshev // *Phys. Solid State* **44** (2002) 2240.
- [82] A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov // *Int. J. Sol. Structures* **47** (2010) 58.
- [83] L.Z. Wu, S.Y. Du // *Proc. R. Soc. London A* **455** (1999) 879.
- [84] H. Hasegawa, V.G. Lee, T. Mura // *J. Appl. Mech.* **59** (1992) 107.
- [85] W. Nowacki, *Thermoelasticity* (Pergamon, New York, 1962).
- [86] V.I. Lawrenuk // *Izv. AN SSSR, Mechan. Tverd. Tela* N 3 (1979) 63 (in Russian).
- [87] Ya.S. Podstigach, V.A. Lomakin and Yu.M. Kolyano, *Thermoelasticity of Solids with Inhomogeneous Structure* (Nauka, Moscow, 1984), in Russian.
- [88] S.L. Sass, T. Mura, J.B. Cohen // *Phil. Mag.* **16** (1967) 679.
- [89] G. Faivre // *Phys. Stat. Sol.* **35** (1969) 249.
- [90] R. Sankaran, C. Laird // *J. Mech. Phys. Solids* **24** (1976) 251.
- [91] Y.P. Chiu // *J. Appl. Mech.* **44** (1977) 587.
- [92] T.J. Gosling, J.R. Willis // *J. Appl. Phys.* **77** (1995) 5601.
- [93] G.J. Rodin // *J. Mech. Phys. Solids* **44** (1996) 1977.
- [94] J.R. Downes, D.A. Faux, E.P. O'Reilly // *J. Appl. Phys.* **81** (1997) 6700.

- [95] H. Nozaki, M. Taya // *J. Appl. Mech.* **64** (1997) 495.
- [96] T. Mura // *Mech. Res. Commun.* **24** (1997) 473.
- [97] T. Mura // *Mater. Sci. Engng. A* **285** (2000) 224.
- [98] H. Nozaki, N. Taya // *J. Appl. Mech.* **68** (2001) 441.
- [99] R.D. Mindlin, D.H. Cheng // *J. Appl. Phys.* **21** (1950) 931.
- [100] K. Aderogba // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **80** (1976) 555.
- [101] K. Seo, T. Mura // *J. Appl. Mech.* **46** (1979) 568.
- [102] H.Y. Yu, S.C. Sanday // *J. Appl. Mech.* **57** (1990) 74.
- [103] A.A. Maradulin, R.F. Wallis // *Surf. Sci.* **91** (1980) 423.
- [104] F. Loges, B. Michel, A. Christ // *Z. Angew. Math. Mech.* **83** (1985) 65.
- [105] L.Z. Wu // *Acta Mech. Sinica* **19** (2003) 253.
- [106] Y.P. Chiu // *J. Appl. Mech.* **45** (1978) 302.
- [107] S.M. Hu // *J. Appl. Phys.* **66** (1989) 2741.
- [108] F. Glas // *J. Appl. Phys.* **70** (1991) 3556.
- [109] K.L. Malyshev, M.Yu. Gutkin, A.E. Romanov, A.A. Sitnikova and L.M. Sorokin // Preprint of Ioffe Physico-technical Institute N 1109 (Leningrad, 1987), in Russian.
- [110] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko. Physical mechanics of deformed nanostructures. Vol. II. Nanolayered structures (Yanus, St. Petersburg, 2005). P. 68.
- [111] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman // *J. Phys.: Condens. Matter* **15** (2003) 3539.
- [112] H. Hasegawa, R.H. Liang, T. Mura // *J. Thermal Stresses* **15** (1992) 295.
- [113] H. Hasegawa, V.G. Lee, T. Mura // *J. Appl. Mech.* **60** (1993) 33.
- [114] L.Z. Wu, S.Y. Du // *J. Appl. Mech.* **63** (1996) 925.
- [115] J. Dundurs, D.N. Guell // *Proc. 2nd South Western Conf. Theoret. and Appl. Mech. Devel. in Theoret. and Appl. Mech.* **2** (1965) 199.
- [116] D.L. Guell, J. Dundurs: // *Devel. in Theoret. and Appl. Mech.* **3** (1967) 105.
- [117] K. Aderogba // *Phil. Mag* **35** (1977) 281.
- [118] H.Y. Yu, S.C. Sanday // *Proc. R. Soc. London A* **434** (1991) 503.
- [119] R.D. Mindlin // *Physics* **7** (1936) 195.
- [120] H.Y. Yu, S.C. Sanday // *Proc. R. Soc. London A* **434** (1991) 521.
- [121] L.J. Walpole // *J. Appl. Mech.* **59** (1997) 193.
- [122] A.M. Korsunsky // *J. Appl. Mech.* **64** (1997) 697.
- [123] C.Q. Ru, P. Schiavone, A. Mioduchowski // *Z. Angew. Math. Phys.* **52** (2001) 18.
- [124] Y.F. Sun, Y.Z. Peng // *Appl. Math. Comput.* **140** (2003) 105.
- [125] F. Kroupa, L. Lejček // *Czech. J. Phys. B* **20** (1970) 1063.
- [126] H.Y. Yu, S.C. Sanday // *Proc. R. Soc. London A* **438** (1992) 103.
- [127] T. Chang, W. Guo, H.R. Dong // *J. Strain Anal. Eng.* **36** (2001) 277.
- [128] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman // *J. Phys.: Condens. Matter* **12** (2000) 5391.
- [129] K.E. Aifantis, A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov // *Philos. Mag.* **87** (2007) 4731.
- [130] M.A. Jaswon, R.D. Bhargava // *Proc. Camb. Phil. Soc.* **57** (1961) 669.
- [131] R.D. List // *Proc. Camb. Phil. Soc.* **65** (1969) 823.
- [132] J.R. Willis // *Q. J. Mech. Appl. Math.* **17** (1964) 157.
- [133] R.D. Bhargava, H.C. Radhakrishna // *Proc. Camb. Phil. Soc.* **59** (1963) 821.
- [134] R.D. Bhargava, H.C. Radhakrishna // *J. Phys. Soc. Japan* **19** (1964) 396.
- [135] W.T. Chen // *Q. J. Mech. Appl. Math.* **20** (1967) 307.
- [136] R.J. Asaro, D.M. Barnett // *J. Mech. Phys. Solids* **23** (1975) 77.
- [137] I.A. Kunin and E.G. Sosnina // *Doklady AN SSSR* 199 (1971) 571, in Russian.
- [138] H.C. Yang, Y.T. Chou // *J. Appl. Mech.* **43** (1976) 424.
- [139] H.C. Yang, Y.T. Chou // *J. Appl. Mech.* **44** (1977) 437.

- [140] R.A. Masumura, Y.T. Chou // *J. Appl. Mech.* **49** (1982) 52.
- [141] H.T. Zhang, Y.T. Chou // *J. Appl. Mech.* **52** (1985) 87.
- [142] C.Q. Ru // *Acta Mech.* **160** (2003) 219.
- [143] P. Sharma, S. Ganti // *Phys. Status Solidi B* **234** (2002) R10.
- [144] P. Sharma, S. Ganti, N. Bhate // *Appl. Phys. Lett.* **82** (2003) 535.
- [145] L.H. He, C.W. Lim, B.S. Wu // *Int. J. Solids Struct.* **41** (2004) 847.
- [146] P. Sharma, S. Ganti // *J. Appl. Mech.* **71** (2004) 663.
- [147] H. Duan, J. Wang, Z. Huang, Z. Luo // *Mech. Mater.* **37** (2005) 723.
- [148] L.H. He, Z.R. Li // *Int. J. Solids Struct.* **43** (2006) 6208.
- [149] C.W. Lim, Z.R. Li, L.H. He // *Int. J. Solids Struct.* **43** (2006) 5055.
- [150] R. Maranganti, P. Sharma, In: *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology*, ed. by M. Rieth and W. Schommers (American Scientific Publ., 2006). Vol. 1, p. 1.
- [151] C. Mi, D.A. Kouris // *J. Mech. Mater. Struct.* **1** (2006) 763.
- [152] D.A. Kouris, C. Mi // *Surf. Sci.* **601** (2007) 757.
- [153] C. Mi, D.A. Kouris // *JSME Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering* **1** (2007) 1219.
- [154] P. Sharma, L.T. Wheeler // *J. Appl. Mech.* **74** (2007) 447.
- [155] C. Mi, D.A. Kouris // *Theoret. Appl. Mech.* **35** (2008) 267.
- [156] H.J. Chu, H.L. Duan, J. Wang, B.L. Karihaloo, In: *IUTAM Symposium on Modelling Nanomaterials and Nanosystems*, ed. by R. Pyrz and J.C. Rauhe (Springer, 2009), p. 181.
- [157] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch // *Archives for Rational Mechanics and Analysis* **57** (1975) 291; **59** (1975) 389.
- [158] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch // *Int. J. Solids Struct.* **14** (1978) 431.
- [159] M. E. Gurtin, J. Weissmüller, F. Larché // *Phil. Mag. A* **78** (1998) 1093.
- [160] E. Kröner, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Einenspannungen* (Springer, 1958).
- [161] Lord Kelvin, In: *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge University Press, 1882), Vol. 1, p. 97.
- [162] E. Mann, R. von Jan, A. Seeger // *Phys. Stat. Sol.* **1** (1961) 17.
- [163] K.H.C. Lie, J.S. Koehler // *Adv. Phys.* **17** (1968) 421.
- [164] H. Bross // *Phys. Stat. Sol.* **5** (1964) 329.
- [165] D.M. Barnett // *Phys. Stat. Sol. (b)* **49** (1972) 741.
- [166] J.W. Deutz, H.R. Schober // *Comp. Phys. Comm. (Netherlands)* **30** (1983) 87.
- [167] S.A. Gunderson, J. Lothe // *Phys. Stat. Sol. (b)* **143** (1987) 73.
- [168] C.Y. Wang, J.D. Achenbach // *Wave Motion* **18** (1993) 273.
- [169] C.Y. Wang // *Int. J. Solids and Struct.* **31** (1994) 2591.
- [170] Y. Hisada // *Bull. Seismolog. Soc. Am.* **85** (1995) 1525.
- [171] T.C.T. Ting // *Q. J. Mech. Appl. Math.* **49** (1996) 1.
- [172] T.C.T. Ting, V.G. Lee // *Q. J. Mech. Appl. Math.* **50** (1997) 407.
- [173] E. Pan // *Appl. Math. Modell.* **21** (1997) 509.
- [174] C.Y. Wang // *J. Eng. Math.* **32** (1997) 41.
- [175] D.A. Faux, G.S. Pearson // *Phys. Rev. B* **62** (2000) R4798.
- [176] E. Pan, F.G. Yuan // *Int. J. Solids Struct.* **37** (2000) 5329.
- [177] V.K. Tewary // *J. Eng. Math.* **49** (2004) 289.
- [178] K. Portz, A.A. Maradulin // *Phys. Rev. B* **16** (1977) 3535.
- [179] K.P. Walker // *Proc. R. Soc. London A* **443** (1993) 367.
- [180] E. Pan // *J. Appl. Mech.-Trans. ASME* **70** (2003) 101.
- [181] L. Rongved // *Proc. 2nd Midwestern Conf. Solid Mech.*(1955) 1.
- [182] J. Dundurs, M. Hetényi // *J. Appl. Mech.* **32** (1965) 671.

- [183] V.A. Shchukin, D. Bimberg, V.G. Malyshkin, N.N. Ledentsov // *Phys. Rev. B* **57** (1998) 12262.
- [184] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill, New York, 1970).
- [185] A.G. Sheinerman, M.Yu. Gutkin // *Phys. Stat. Sol. (a)* **184** (2001) 485.
- [186] I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman // *Phil. Mag.* **84** (2004) 2103.
- [187] I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman, *Nanomechanics of quantum dots and wires* (Yanus, St. Petersburg, 2004), in Russian.
- [188] I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman // *Adv. Phys.* **55** (2006) 627.