

## ГИДРОДИНАМИКА ЖИДКИХ НАНОСЛОЁВ

Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин\*, Ю.В. Павлов

Институт проблем машиноведения Российской академии наук,

Большой пр. 61, В.О., Санкт-Петербург 199178, Россия

\*e-mail: bulygin\_an@mail.ru

**Аннотация.** Разработана модель жидких нанослоёв. Модель учитывает способность жидкости в наноскопических зазорах приобретать анизотропию под действием гидродинамического потока, а также заимствовать псевдокристаллическую структуру под действием кристаллической подложки. Вводятся два поля: поле макроскопических скоростей  $V(r,t)$  и поле микросмещений  $u(r,t)$ . Диссипативные явления описываются полем  $V(r,t)$ . Поле  $u(r,t)$  описывает структурные изменения, обусловленные смещением соседних атомов в областях ближнего порядка. Поля  $V(r,t)$  и  $u(r,t)$  находятся из двух векторных уравнений. Первое - обобщение уравнения Навье-Стокса. Второе - обобщение уравнения синус-Гордона. Рассмотрены установившиеся течения структурированной жидкости в зазоре между параллельными плоскостями (Куэтта и Пуазейля). Анализ решений позволяет установить различия в реологических свойствах ньютоновских и структурированных жидкостей.

### 1. Введение

В настоящее время в механике среды вообще и в механике жидкости в частности происходит смена парадигмы. Континуальная модель более не является адекватной тем новым проблемам, которые возникли в связи с глубоким проникновением в область малых наноскопических масштабов. Новые высокие технологии развиваются опережающими темпами. Создаются новые материалы и приборы, работающие в наноскопическом диапазоне размеров. Успехи экспериментальных исследований после создания новых методов изучения поверхности, ее рельефа и поверхностных сил открыли заманчивые перспективы и для теоретических исследований в области механики и физики наномасштабных объектов, а также явлений, происходящих на дискретном уровне строения вещества. Это открывает возможности для выявления тех микромеханизмов, которые лежат в основе многих не понятых до конца явлений и в механике материалов, которые описываются феноменологически на основе теории сплошных сред.

В гидродинамике вновь повышенным вниманием пользуется проблема сверхтонких слоев жидкости, которая была поставлена в самом начале прошлого века и разрабатывалась в меру ограниченных экспериментальных возможностей того времени применительно в основном к задачам теории смазывающего действия (Ахматов [1], Фукс [2]). В работах Дерягина и его учеников впервые надежно установлен масштабный эффект вязкости [3, 4], ее (как правило) повышение вблизи граничного слоя порядка 0.1 мкм. Выявлен эффект расклинивающего давления [5, 6, 7], которое создает смачивающая жидкость. Было введено понятие структурных сил [8, 9], возникающих в непосредственной близости от твердой подложки.

Теория структурных сил, развиваемая в работах и зарубежных исследователей

[10, 11] (Марчелья, Нинхем и др.) оказалась, однако, состоятельной для смачивающих жидкостей. Не удалось построить теорию несмачивания. Не была полностью решена проблема характерного размера толщины смачивающего слоя. Кроме того, теория относилась к неподвижному слою в отсутствие сдвигового течения, существенно влияющего на его толщину и устойчивость.

В настоящее время возникли новые проблемы. К ним относятся задачи создания молекулярного компьютера, требующие уравнений движения молекулярных ансамблей высокоорганизованных слоев бистабильных фотохромных молекул. Бифуркационные проблемы здесь связаны с записью, хранением и передачей информации на молекулярном уровне. Подобные ансамбли легко создаются при контакте жидкости со специально обработанной поверхностью. Другое направление - это биотехнологии [12, 13, 14], обеспечивающие нанесение, удержание и снятие слоев полезных (лекарственных) или вредных (ядовитых, отравляющих) ингредиентов и управление этими процессами. Третье направление относится к нанотрибологии [15, 16, 17], новой науке о контактном взаимодействии деталей микроэлектрических и нанозлектрических машин (молекулярные насосы, моторы). Можно указать и на другие проблемы, выдвинутые в настоящее время в зарубежной литературе. Это создание незагрязняющихся поверхностей прозрачных объектов, обеспечение легкого переноса молекулярного слоя (но, тем не менее, с хорошей адгезией!) - скоростного молекулярного "поезда", создание слоев с заданной молекулярной архитектурой.

Данная работа посвящена разработке как статической, так и гидродинамической теории, учитывающей сложную структуру и реологию поверхностных наномасштабных слоев, состоящих из собственных молекул жидкости.

## **2. Модель жидкости с наведённой анизотропией**

Проблема, с которой сталкиваются теоретики при описании поведения и свойств жидкости в непосредственной близости от твердой поверхности состоит во введении в математическую модель ее индуцированной структуры в граничном слое и соответствующих сил взаимодействия. В ранее развиваемых теориях структурных сил сама структура никак не вводилась, а величина сил описывалась простейшей экспоненциальной формулой убывания в глубину жидкости. Теория пыталась выразить коэффициент перед экспонентой через молекулярные параметры твердой подложки, например, через ее поляризуемость.

Необходимо учитывать силы взаимодействия, как с веществом подложки, так и собственные межмолекулярные силы жидкости, которые существенно отличаются от соответствующих сил в объеме, а также и силы на границе раздела (если она существует) там, где кончается приграничный слой.

Все эти вопросы и многие другие могут решаться в пределах структурной модели приграничного иммобилизованного слоя жидкости, т.е. жидкости, в которой подавлено тепловое движение (как при охлаждении) и ее структура является анизотропной и даже квазипериодической. Оставим пока проблему несмачивающей жидкости, заметив, что это экзотика - большинство жидкостей в какой-то мере все-таки к твердой подложке притягиваются. На твердой поверхности всегда существует система активных центров, связывающих молекулы жидкости. Разумно допустить, что для смачивающих жидкостей эти центры связаны с периодической структурой подложки и расположены регулярно. Тогда легко понять механизм смачивания как возможность жидкости самой образовать регулярную приграничную структуру, минимизирующую свою внутреннюю энергию. Для иммобилизации приграничных молекул необходимо, чтобы первый слой лежал предельно низко в ямах атомарного микрорельефа подложки. Следующий слой располагается в менее глубоких ямах, образованных молекулами

первого слоя - для ван-дер-ваальсовых парных сил. Последний молекулярный слой не имеет достаточно глубоких ям и потому демобилизуется - молекулы приобретают такую же подвижность, как в объеме жидкости. Эта примитивная, но правдоподобная модель становится более реалистичной, если учесть взаимодействие молекулы слоя не только с “нижней” и “верхней”, но и с боковыми соседями. Тогда можно говорить, что иммобилизованный слой это псевдокристалл не вполне совместимый с подложкой, но адаптированный к ней за счет внутренних сил, не нарушающих все же его регулярной структуры. Это все же слой жидкости, а не твердый слой другого вещества, который мог бы адаптироваться путем создания сингулярных дефектов типа дислокаций несоответствия. Возможность его самоорганизации позволяет “бороться” с сингулярными дефектами путем ограничения толщины слоя.

Поэтому если правильно написать уравнение равновесия этой напряженной, но бездефектной структуры, то оно должно определить его толщину. Более того, в пределах такой квазикристаллической модели можно сформулировать условия потери устойчивости слоя в целом с переходом структуры в иное состояние - новое устойчивое, но несовместимое с периодической структурой подложки. Здесь можно поискать возможности для формулировки случая несмачивающего контакта.

Поскольку иммобилизованный слой состоит из тех же молекул, что и жидкость в объеме, возникает проблема его размытия потоком жидкости. Точнее говоря, его толщина должна зависеть от градиента скорости или от сдвиговых напряжений, а также от нормальных напряжений, которые могут увеличивать или уменьшать сцепление с подложкой за счет увеличения или уменьшения степени “погружения” молекул в потенциальные ямы. Возникает проблема механизма перекрестного влияния потока и структуры слоя. Эта проблема решается просто, если ввести структуру жидкости в объеме, которая является предельным случаем приграничной, вырожденной структуры. Тогда возникает единая модель структурированной жидкости. Поведение жидкости слабо возмущается наличием такой структуры в объеме, но структура сильно изменяется с приближением к границе.

В жидкости, как известно, существует ближний трансляционный порядок в расположении молекул, который простирается на одно, два межмолекулярных расстояния. О нем вспоминают, когда нужно понять сжимаемость жидкости и наличие второго коэффициента вязкости (объемной), которую связывают с перестройкой ближнего порядка. В сдвиговом потоке роль ближнего порядка в объеме ничтожна, однако обратное влияние сдвигового потока на ближний порядок может быть весьма значительным и проявляется в появлении анизотропии жидкости изотропной в покое. Этот эффект давно установлен, изучен и носит название эффекта Максвелла или двулучепреломления в потоке. Можно считать, что поверхность усиливает его за счет увеличения радиуса корреляции и слияния областей ближнего порядка в единый однородный вдоль поверхности тонкий слой упорядоченной жидкости. Хотя вдоль поверхности возникает дальний квазипорядок, в поперечном направлении корреляционная длина не достигает более 8 - 10 межатомных расстояний.

### **3. Диссипативная модель псевдопластической жидкости**

В качестве первого этапа теории рассмотрим проблему в рамках идеальной жидкости, не учитывающей ее вязкости, когда необратимые процессы связаны с пластическими деформациями в граничных слоях жидкости, реализующимися через микромеханизмы структурных (фазовых) переходов через точки бифуркации. Это облегчит в дальнейшем введение модели вязкоупругой жидкости. Тем не менее, упрощенная модель имеет и самостоятельное значение. Она оправдана при рассмотрении весьма узких зазоров (например, нанотрубок), когда свободное течение подобной

пластической жидкости затруднено, но интересны задачи о ее капсулизации и продавливании через каналы внешними усилиями.

**3.1. Энергетические соотношения.** Определим лагранжиан  $L$  и упругую энергию структуры  $f$  следующими соотношениями

$$L = \int_v [(\rho/2)V_i V_i + (\mu/2)\dot{u}_i \dot{u}_i - f] dv, \quad (3.1)$$

$$f(u_{i,k}; u_i) = \alpha \delta \rho^2 + (1/2)k_{ikmn} u_{i,k} u_{m,n} + p(1 - \cos u_R). \quad (3.2)$$

Здесь  $V_m$  - макроскопическая скорость,  $u_n$  - вектор наведенной анизотропии,  $l_i = u_i/u$  и  $u = (u_n u_n)^{1/2}$  - его орт и абсолютное значение.

Первое слагаемое в (3.2) - это энергия объемного сжатия, второе слагаемое - энергия неоднородного искажения микроструктуры жидкости. Здесь  $k_{ikmn}$  - коэффициент микродисторсии, симметричный к перестановке пар индексов ( $k_{ikmn} = k_{mnik}$ ). Третье слагаемое представляет собой упругую энергию однородного искажения периодической микроструктуры приграничного слоя за счет его притяжения к твердой подложке,  $2p$  - энергия активации межатомных связей.

Под знаком косинуса фигурирует следующая диада векторов анизотропии:

$$u_R = (u_i \alpha_{ik} u_k)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Здесь  $\alpha_{ik}$  есть тензор обратных векторов решетки. Для кристаллов кубической симметрии получим более простое соотношение:

$$u_R = u = (u_n u_n)^{1/2}. \quad (3.4)$$

Очевидно,  $u$  - абсолютная величина вектора микросмещений,  $l_i$  - его орт.

Как уже отмечалось, диада  $u_i u_k$  характеризует степень анизотропности - изменение размера области ближнего порядка вдоль оси анизотропии  $l_i = u_i / |u|$ .

Введем теперь мощность диссипации  $d$  упругой энергии, удовлетворяющую принципу инвариантности к жесткому вращению:

$$d(e_{ik}; \dot{u}; u) = (1/2) \eta_{ikmn} e_{ik} e_{mn} + S_{ik} e_{ik} (1 - \cos u_R) + s^o u_i P_{,i}. \quad (3.5)$$

Здесь

$$e_{ik} = \frac{V_{i,k} + V_{k,i}}{2}, \quad (3.6)$$

а  $S_{ik}$  - постоянный симметричный тензор. Первое слагаемое в (3.5) представляет вязкую диссипацию,  $\eta_{ikmn}$  - тензор коэффициентов вязкости, симметричный относительно перестановки пар индексов и индексов пары между собой ( $\eta_{ikmn} = \eta_{mnik} = \eta_{kimn} = \eta_{iknm}$ ). Заметим, что анизотропия вязкости в глубине слоя может быть мала и в первом приближении пренебрежима, что будет учитываться в задачах.

Второе слагаемое обусловлено эффектом Максвелла - возникновение анизотропии в гидродинамическом потоке (в поле градиентов скоростей). Связанная с ней диссипация обусловлена действием сил вязкого трения, которые упруго деформируют область ближнего порядка, превращая сферу в эллипсоид с главной осью (анизотропии), направленной вдоль орта  $l_i$ . Величина  $u$  характеризует степень анизотропности - изменение размера шара вдоль оси анизотропии  $l_i$ .

Последнее слагаемое  $s^o u_i P_{,i}$  учитывает перекрестный эффект - возникновение анизотропии в неоднородном поле давления.

**3.2. Уравнения движения.** Варьируя функционал (3.1) получим вначале следующие динамические уравнения обратимых процессов.

Уравнение баланса макроимпульса, очевидно, имеет вид:

$$\rho \dot{V}_i = \sigma_{ik,k}^+,$$

$$\sigma_{ik}^+ = -P \delta_{ik}. \quad (3.7)$$

Здесь  $\rho$  - плотность массы,  $\sigma_{ik}^+$  - бездиссипативный тензор напряжений,  $P$  - давление.

В случае сжимаемой жидкости

$$P = \alpha \delta \rho; \quad \delta \rho = \rho_o - \rho, \quad (3.8)$$

где  $\alpha$  - коэффициент объемной упругости.

Уравнение неразрывности:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} V = 0. \quad (3.9)$$

Далее следуют вариационные уравнения баланса микроимпульса:

$$\mu \ddot{u}_i = k_{ikmn} u_{k,mn} - l_i (p - S_{ik} e_{ik}) \sin u_R, \quad (3.10)$$

где  $\mu$  — приведенная микроплотность в областях ближнего порядка.

Диссипация вносит вклад и в баланс сил (макроскопических и структурных) - в уравнениях движения (3.7), (3.10) появляются дополнительные слагаемые.

Пользуясь тем обстоятельством, что диссипативная функция (3.5) представляет собой сумму линейных и квадратичных слагаемых по скоростям определяющих переменных ( $e_{ik}$ ,  $\dot{u}$ ), можно найти соответствующие обобщенные силы путем дифференцирования (3.5) по определяющим переменным, учитывая теорему Эйлера об однородных функциях. Тогда получим диссипативную добавку к напряжениям:

$$\sigma_{ik} = \eta_{ikmn} e_{mn} - S_{ik} (1 - \cos u_R). \quad (3.11)$$

Здесь второе слагаемое не зависит от скорости.

Диссипативная добавка к силе взаимодействия кластеров имеет вид:

$$\delta = S_{ik} e_{ik} \sin u_R. \quad (3.12)$$

Внося добавку (3.11) в выражение для напряжений в (3.7), а добавку к силам - в уравнение (3.10), получим уравнения движения упруго-вязко-пластической жидкости в виде

$$\rho \dot{V}_i = -P_i + \sigma_{ik,k}, \quad (3.13)$$

$$\sigma_{ik} = \eta_{ikmn} e_{mn} - S_{ik} (1 - \cos u_R), \quad (3.14)$$

$$\mu \ddot{u}_i = k_{ikmn} u_{k,mn} - l_i (p - S_{jk} e_{jk}) \sin u_R. \quad (3.15)$$

Отметим, что свернув уравнение (3.15) с ортом вектора микросмещений и производя элементарные операции, можно переписать последнее уравнение в виде двух уравнений:

$$\mu l_j \ddot{u}_j = l_j k_{jkmn} u_{k,mn} - (p - S_{jk} e_{jk}) \sin u_R, \quad (3.16)$$

$$\mu (\ddot{u}_i - l_i l_j \ddot{u}_j) = k_{ikmn} u_{k,mn} - l_i l_j k_{jkmn} u_{k,mn}. \quad (3.17)$$

Последнее векторное уравнение эквивалентно двум независимым поскольку его свертка с ортом  $l_i$  дает тождество.

Такова общая тензорная форма записи основных уравнений движения вязко-упруго-пластической жидкости с переменной структурой в ближнем порядке с учетом ее наведенной анизотропии.

В такой форме они неоправданно сложны поскольку величина наведенной анизотропии в объеме очень часто оказывается малой и существенна главным образом вблизи твердой поверхности. Это прежде всего относится к тензорам вязкости и упругости. Будем считать их в объеме изотропными, полагая, что

$$\begin{aligned} \eta_{ikmn} &= \eta_1 (\delta_{im} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{km}) + \eta_2 \delta_{ik} \delta_{mn}, \\ k_{ikmn} &= k_1 \delta_{ik} \delta_{mn} + k_2 \delta_{in} \delta_{km} + k_3 \delta_{im} \delta_{kn}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

С учётом (3.18) уравнения (3.15), (3.16) можно записать в другом виде, если  $e_{jk}$  выразить из соотношения (3.14) через напряжения и вычислить свёртку  $S_{jk} e_{jk}$ :

$$p - S_{jk} e_{jk} = Q_1 + 2Q_2 \cos u_R. \quad (3.19)$$

Здесь

$$Q_1 = p - 2Q_2 - \frac{1}{2\eta_1} \left( \sigma_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + \eta_2 S_{\alpha\alpha} \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right), \quad (3.20)$$

$$Q_2 = \frac{S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}}{4\eta_1}. \quad (3.21)$$

Подставив (3.19) в (3.15) и (3.16) для вектора микросмещений получаем уравнения типа двойной синус-Гордон. Так (3.16) переходит в уравнение:

$$\mu l_i \ddot{u}_i = l_i \left[ k_1 u_{i,nn} + (k_2 + k_3) u_{n,in} \right] - Q_1 \sin u_R - Q_2 \sin 2u_R. \quad (3.22)$$

Эта форма записи указывает на силовой механизм влияния на кластерную структуру, которая при определённых значениях неупругих напряжений может испытывать структурное превращение подобное фазовому переходу второго рода. Так, если вязкие напряжения достигают значений, при которых  $Q_1 = 0$ , то в этой бифуркационной точке влияние стенки компенсируется внешним воздействием и уравнения микродвижений оказываются не связанными с уравнениями для поступательной скорости. Из (3.20) видно, что существуют и другие точки (линии) бифуркаций. Например, бифуркационными будут точки, в которых  $Q_1$  меняет знак. В этих точках гидродинамический поток опрокидывает собственную структуру пристенного слоя и происходит переход к новой равновесной наведённой микроструктуре. Кардинальные изменения сказываются, прежде всего, на плотности энергии пристенного слоя. Детально эти вопросы целесообразно рассматривать на конкретных случаях течений структурированной жидкости.

#### 4. Одномерная теория плоского течения

Будем рассматривать жидкость с наведёнными стенками кубической структурой, учитывая соотношение (3.4). Рассмотрим медленное движение структурированной жидкости в плоском капилляре, расположенном вдоль оси ОУ. Тогда в уравнении макроскопического потока (3.13) удерживаются две компоненты скорости, а в уравнении (3.15) - две компоненты микросмещения, зависящие от одной (поперечной) координаты:  $V_x(x)$ ,  $V_y(x)$  и  $u_x(x)$ ,  $u_y(x)$ . Кроме того пренебрегаем в случае медленного течения квадратичными по скоростям слагаемыми вида  $V_n V_n$ . В результате получим вместо (3.13), (3.14) следующую систему уравнений:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -P_{,x} + (2\eta_1 + \eta_2) V_{x,xx} - S_{xx} (1 - \cos u_x)_{,x}, \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{\partial V_y}{\partial t} = -P_{,y} + \eta_1 V_{y,xx} - S_{yx} (1 - \cos u_x)_{,x}. \quad (4.2)$$

К ней нужно добавить и уравнение неразрывности (3.9).

Систему уравнений микродвижений (3.15) распишем для кристалла кубической симметрии. Она после некоторых упрощений принимает вид

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -(p - S_{ik} e_{ik}) l_x \sin u_y + (k_1 + k_2 + k_3) u_{x,xx}, \quad (4.3)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -(p - S_{ik} e_{ik}) l_y \sin u_x + k_1 u_{y,xx}. \quad (4.4)$$

Здесь учтено приближение медленного движения  $V_n u_n \approx 0$ . Упрощение касается

также аргументов под знаком синуса. Строго говоря нужно было использовать выражение  $u = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$ . Ради упрощения задачи приняли приближение:

$$u_x \ll u_y; \quad l_x \ll l_y. \quad (4.5)$$

Оно означает, что в действительности во многих случаях поперечное микроскольжение много меньше продольного. Второе неравенство позволяет также пренебречь синусоидальным слагаемым  $l_x \sin u_y$  в первом уравнении и заменить единицей множитель  $l_y$  во втором. Тогда окончательно получим систему:

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (k_1 + k_2 + k_3) u_{x,xx}, \quad (4.6)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -(p - S_{ik} e_{ik}) \sin u_y + k_1 u_{y,xx}. \quad (4.7)$$

**4.1. Граничные условия.** Для нахождения макроскопической скорости  $V(\mathbf{r}, t)$  и микросмещений  $u(\mathbf{r}, t)$  необходимы граничные условия. В классической гидродинамике считается, что скорость жидкости на смачивающей твёрдой поверхности  $V_S$  совпадает со скоростью поверхности  $V_f$ . Гипотезу “прилипания” первым сформулировал Стокс [18]. Навье в основополагающей работе [19] допускал проскальзывание жидкости относительно твёрдой поверхности и предполагал, что скорость проскальзывания линейно зависит от напряжения  $\tau_f$ , действующего на поверхность со стороны жидкости:

$$\chi(V_S - V_f) = \tau_f, \quad (4.8)$$

Стокс проанализировал имеющиеся в литературе экспериментальные данные и нашёл, что коэффициент  $\chi$  численно получается очень большим. Это позволило ему принять, что

$$V_S = V_f. \quad (4.9)$$

В последние годы в связи с развитием мезо- и наногидродинамики идеи Навье вновь возродились. Полагают, что на твёрдой поверхности выполняется условие:

$$V_S - V_f = l_s \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_S. \quad (4.10)$$

Здесь  $l_s$  - длина проскальзывания, а  $n$  - координата, нормальная к твёрдой поверхности.

Анализ экспериментальных данных по вискозиметрическим течениям приводит к заключению, что длина проскальзывания  $l_s$  (при постоянной температуре) зависит от пары жидкость-твёрдая поверхность и изменяется от единиц до десятков нанометров [20-25]. Для наноскопических зазоров эффект проскальзывания в некоторых случаях



оказывается существенным и его необходимо учитывать. В литературе сформулированы и более сложные нелинейные условия проскальзывания [15]:

$$V_s - V_f = C_1 \lambda \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_s - C_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \Big|_s. \quad (4.11)$$

Что касается микросмещений, то считаем, что на твёрдой поверхности структура жидкости определяется взаимодействием молекул жидкости с твёрдой поверхностью и принимаем, что на твёрдой поверхности выполняется простейший вариант граничных условий

$$u \Big|_s = u_s. \quad (4.12)$$

**4.2. Простое сдвиговое течение.** Решим задачу о чисто продольном стационарном течении структурированной жидкости в плоском капилляре (течение Куэтта), наложив на уравнения медленного плоского течения дополнительные условия:

$$V_x = 0, \quad u_x = 0, \quad u_y = u(x). \quad (4.13)$$

Отсюда с учётом ранее принятого условия  $V_y = V(x)$  следует, что  $\operatorname{div} V = 0$ . Тогда система (4.1), (4.2), (4.6), (4.7) примет вид:

$$-P_{,x} - S_{xx} (1 - \cos u)_{,x} = 0, \quad (4.14)$$

$$\eta_1 V_{,xx} - S_{yx} (1 - \cos u)_{,x} = 0, \quad (4.15)$$

$$k_1 u_{,xx} - (p - S_{yx} V_{,x}) \sin u = 0. \quad (4.16)$$

Систему уравнений (4.14) - (4.16) запишем в безразмерной форме, положив

$$P = \bar{P} S_{xx}, \quad V = v V_h, \quad x = \xi h. \quad (4.17)$$

Здесь  $V_h$  — скорость движения верхней плоскости, а  $h$  — ширина плоского капилляра.

$$\bar{P}_{,\xi} + (1 - \cos u)_{,\xi} = 0, \quad (4.18)$$

$$v_{,\xi\xi} = A (1 - \cos u)_{,\xi}, \quad (4.19)$$

$$u_{,\xi\xi} = \left( \frac{ph^2}{k_1} - \frac{S_{yx} h V_h}{k_1} v_{,\xi} \right) \sin u. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.18) определяет давление:

$$\bar{P} = P_0 - (1 - \cos u), \quad (4.21)$$

а (4.20) выражает поступательную скорость жидкости через величину  $u(x)$  :

$$v_{,\xi} = A(\sigma_0 + 1 - \cos u). \quad (4.22)$$

Здесь  $(P_0, \sigma_0)$  - постоянные интегрирования, а безразмерная постоянная

$$A = \frac{V_s}{V_h}, \quad V_s = \frac{S_{yx} h}{\eta_1}. \quad (4.23)$$

Если (4.22) подставить в (4.20), то для  $u(x)$  получаем обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение — двойной синус-Гордон с постоянными амплитудами:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = p_1 \sin u + p_2 \sin 2u, \quad (4.24)$$

$$p_1 = \frac{ph^2}{k_1} - 2(\sigma_0 + 1)p_2, \quad p_2 = \frac{S_{yx}^2 h^2}{2\eta_1 k_1}. \quad (4.25)$$

Параметры  $p_1$  и  $p_2$  удобно записать в безразмерном виде:

$$1 + \frac{p_1}{2p_2} = \bar{p} - \sigma_0, \quad 2p_2 = \frac{V_s^2}{V_k^2}, \quad (4.26)$$

$$\bar{p} = \frac{p\eta_1}{S_{yx}^2} = \frac{V_p}{V_s}, \quad V_p = \frac{ph}{S_{yx}}, \quad V_k^2 = \frac{k_1}{\eta_1}. \quad (4.27)$$

Если структурированная жидкость на твёрдых поверхностях удовлетворяет условию “прилипания”:

$$v|_{\xi=0} = 0, \quad v|_{\xi=1} = 1, \quad (4.28)$$

то для макроскопической скорости окончательно находим:

$$v = \xi + \Delta v, \quad (4.29)$$

$$\text{где } \Delta v = A \left[ \int_0^\xi (1 - \cos u) d\xi - \xi \int_0^1 (1 - \cos u) d\xi \right].$$

При этом постоянная

$$\sigma_0 = \frac{1}{A} - \int_0^1 (1 - \cos u) d\xi. \quad (4.30)$$

Формула (4.29) допускает простую гидродинамическую интерпретацию. Первое

слагаемое  $\xi$  - это скорость ньютоновской жидкости. Второе слагаемое  $\Delta v$  - это скорость течения, которое порождается нормальными напряжениями. Последние обусловлены изменением структуры жидкости по нормальному сечению плоского капилляра. Ньютоновская жидкость при простом сдвиговом течении эффект нормальных напряжений не проявляет и для неё  $\Delta v = 0$ . Отметим, что

$$\Delta v|_{\xi=0} = 0, \quad \Delta v|_{\xi=1} = 0. \quad (4.31)$$

Если структурированная жидкость на твёрдых поверхностях удовлетворяет условию “проскальзывания” (4.10):

$$v|_{\xi=0} = \beta v_{,\xi}|_{\xi=0}, \quad v|_{\xi=1} = 1 + \beta v_{,\xi}|_{\xi=1}, \quad \beta = \frac{l_s}{h}, \quad (4.32)$$

то макроскопическая скорость

$$v = v_0 + \delta \xi + \Delta v. \quad (4.33)$$

Здесь

$$v_0 = A\beta[\sigma_0 + 1 - \cos u(0)], \quad (4.34)$$

$$\delta = 1 + A\beta[\cos u(0) - \cos u(1)], \quad (4.35)$$

а постоянная

$$\sigma_0 = \frac{1}{A} - \int_0^1 (1 - \cos u) d\xi + \beta[\cos u(0) - \cos u(1)]. \quad (4.36)$$

Из (4.33) – (4.35) следует

$$v|_{\xi=0} = A\beta[\sigma_0 + 1 - \cos u(0)], \quad v|_{\xi=1} = 1 + A\beta[\sigma_0 + 1 - \cos u(1)], \quad (4.37)$$

$$\delta = v|_{\xi=1} - v|_{\xi=0}. \quad (4.38)$$

Сравнивая течение структурированной жидкости с ньютоновской, видим, что отличия в профиле скорости, величине проскальзывания на твёрдых поверхностях и т.д. обусловлены величиной вектора микросмещений на поверхностях и его изменением по толщине слоя жидкости. В связи с этим необходимо решить уравнение (4.24), описывающее структуру жидкости по сечению плоского капилляра в случае простого сдвигового течения.

**4.3. Решение двойного синус-Гордона уравнения.** Уравнение (4.24) имеет первый интеграл:

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = 4Gp_2 + 4(p_1 + 2p_2)\sin^2 \frac{u}{2} - 8p_2 \sin^4 \frac{u}{2}, \quad (4.39)$$

где  $G$  - постоянная интегрирования.

Правую часть уравнения (4.39) можно записать в виде:

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = 4Gp_2\left(1 + a^2 \sin^2 \frac{u}{2}\right)\left(1 - b^2 \sin^2 \frac{u}{2}\right). \quad (4.40)$$

Здесь

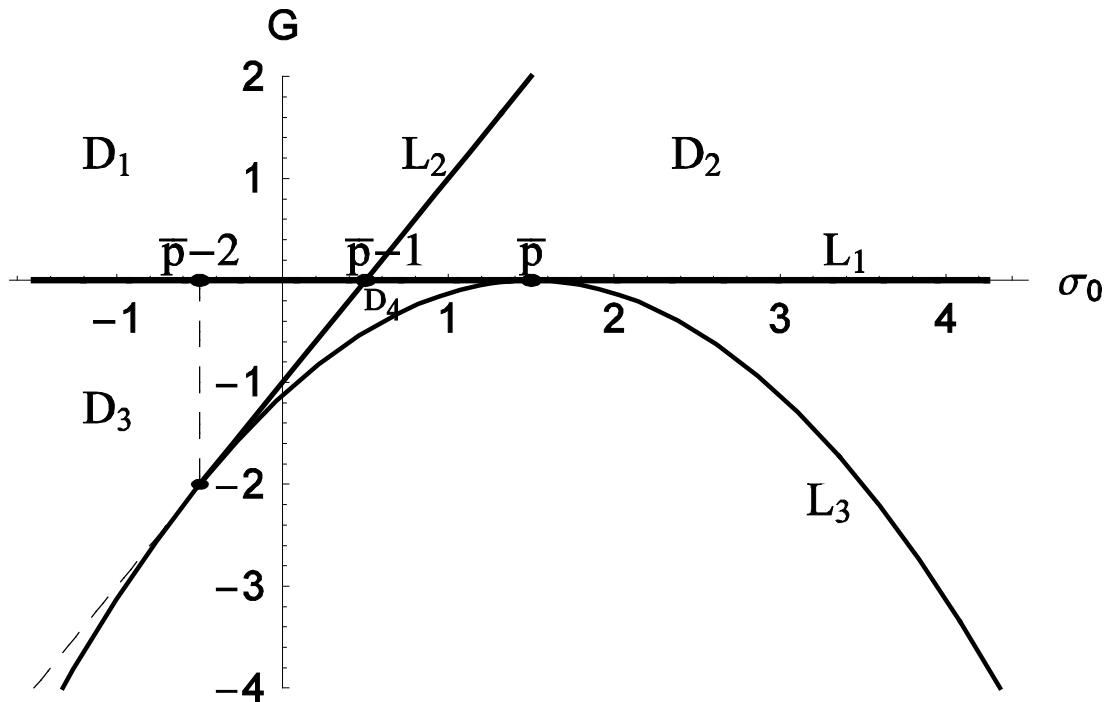
$$a^2 = \frac{1}{G} \left[ (\bar{p} - \sigma_0) + \sqrt{(\bar{p} - \sigma_0)^2 + 2G} \right], \quad (4.41)$$

$$b^2 = \frac{1}{G} \left[ (-\bar{p} - \sigma_0) + \sqrt{(\bar{p} - \sigma_0)^2 + 2G} \right]. \quad (4.42)$$

Решение уравнения (4.40) зависит от параметров  $G$  и  $\sigma_0$ . Если принять, что множество значений  $(G, \sigma_0)$  образуют плоскость, то линиями

$$G = 0, \quad G = 2(\sigma_0 - \bar{p} + 1), \quad G = -\frac{(\sigma_0 - \bar{p})^2}{2} \quad (4.43)$$

она разбивается на определённые области (Рис. 1).



**Рис. 1.** Линии бифуркаций и области существования решений двойного синус-Гордона уравнения.

Для уравнения (4.40) линии (4.43) являются линиями бифуркаций. На линиях бифуркаций решения уравнения (4.40) выражаются через элементарные функции.

На линии  $L_1$  ( $G = 0$ )

$$\frac{u}{2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}\right)}, & v^2 = \frac{1}{1+\frac{p_1}{2p_2}}, \quad \frac{v}{L} = \frac{V_s}{V_k}, \quad (-\infty < \sigma_0 < \bar{p}-1), \\ \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \frac{1}{\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}\right)}, & v^2 = \frac{1}{1-\frac{|p_1|}{2p_2}}, \quad \frac{v}{L} = \frac{V_s}{V_k}, \quad (\bar{p}-1 < \sigma_0 < \bar{p}), \\ \exp\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}\right), & \frac{1}{L} = \frac{V_s}{V_k}, \quad (\sigma_0 = \bar{p}-1). \end{cases} \quad (4.44)$$

На линии  $L_2$  ( $G = 2(\sigma_0 - \bar{p} + 1)$ )

$$\frac{u}{2} = \begin{cases} \sqrt{v^2-1} \left(\frac{\xi+\xi_0}{L}\right), & v^2 = \frac{1}{1-\frac{p_1}{2p_2}}, \quad \frac{v}{L} = \frac{V_s}{V_k}, \quad (\bar{p}-2 < \sigma_0 < \bar{p}-1), \\ \exp\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}\right), & \frac{1}{L} = \frac{V_s}{V_k}, \quad (\sigma_0 = \bar{p}-1), \\ \sqrt{1-v^2} \left(\frac{\xi+\xi_0}{L}\right), & v^2 = \frac{1}{1+\frac{p_1}{2p_2}}, \quad \frac{v}{L} = \frac{V_s}{V_k}, \quad (\bar{p}-1 < \sigma_0 < \bar{p}). \end{cases} \quad (4.45)$$

Здесь  $\xi_0$  — постоянная интегрирования.

Внутри области, ограниченной параболой  $L_3$  ( $G \leq -(\sigma_0 - \bar{p})^2/2$ ), уравнение (4.40) вещественных решений не имеет. Нет вещественных решений и в области  $G < 0$ ,  $\sigma_0 > \bar{p}$ ,  $G > -(\sigma_0 - \bar{p})^2/2$ .

Вещественные решения уравнение (4.40) существуют в областях:

$$\mathbf{D}_1: \quad G > 0, \quad G > 2(\sigma_0 - \bar{p} + 1), \quad \mathbf{D}_2: \quad G > 0, \quad G < 2(\sigma_0 - \bar{p} + 1),$$

$$\mathbf{D}_3: \quad G < 0, \quad [G > -(\sigma_0 - \bar{p})^2/2, \quad G < \sigma_0 - \bar{p}] \cup [G > -(\sigma_0 - \bar{p})^2/2, \quad G > \sigma_0 - \bar{p}],$$

$$\mathbf{D}_4: \quad G < 0, \quad G > -(\sigma_0 - \bar{p})^2/2, \quad G < 2(\sigma_0 - \bar{p} + 1).$$

Эти решения выражаются через эллиптические функции Якоби.

Область  $\mathbf{D}_1$ :

$$\frac{u}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}, \quad \frac{1}{L} = \sqrt{G(1+a^2)}, \quad v^2 = \frac{a^2+b^2}{1+a^2}. \quad (4.46)$$

Область  $\mathbf{D}_2$ :

$$\frac{u}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}, \quad \frac{1}{L} = \sqrt{G(a^2+b^2)}, \quad v^2 = \frac{1+a^2}{a^2+b^2}. \quad (4.47)$$

Область  $D_3$ :

$$\frac{u}{2} = \frac{1}{\sqrt{-(1+a^2)}} \frac{1}{\operatorname{cn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}, \quad \frac{1}{L} = \sqrt{G(a^2+b^2)}, \quad \nu^2 = \frac{1+a^2}{a^2+b^2}. \quad (4.48)$$

Область  $D_4$ :

$$\frac{u}{2} = \frac{1}{\sqrt{-(1+a^2)}} \frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}, \quad \frac{1}{L} = \sqrt{G(a^2+b^2)}, \quad \nu^2 = \frac{a^2+b^2}{1+a^2}. \quad (4.49)$$

Особого рассмотрения заслуживает случай  $p_1 = 0$  ( $\sigma_0 = \bar{p} - 1$ ). Для этого случая

$$\frac{u}{2} = \begin{cases} \sqrt{1-\nu^2} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}, & \frac{1}{L} = \sqrt{2G+p_2}, \quad \frac{\nu}{L} = \sqrt{2p_2}, \quad (2G-p_2 > 0), \\ \frac{1}{\nu} \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{\xi+\xi_0}{L}, \nu\right)}, & \frac{1}{L} = \sqrt{2p_2}, \quad \nu^2 = \frac{2G+p_2}{2p_2}, \quad (2G-p_2 < 0). \end{cases} \quad (4.50)$$

Если  $2G-p_2 = 0$ , то

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \exp \frac{\xi + \xi_0}{L}. \quad (4.51)$$

Подробнее проблема интегрирования синус-Гордона уравнения и его обобщений рассмотрена в работах [26–29].

**4.4. Течение между параллельными плоскостями.** Рассмотрим установившееся течение структурированной жидкости в зазоре шириной  $h$  между параллельными плоскостями под действием продольного перепада давления  $\Delta P$  на длине  $H$  (течение Пуазейля). Считаем, что

$$V_x = 0, \quad V_y = V(x), \quad V_z = 0, \quad u_x = 0, \quad u_y = u(x), \quad u_z = 0. \quad (4.52)$$

Тогда  $\operatorname{div} V = 0$ , а для вычисления давления  $P$ , поступательной скорости  $V(x)$  и микросмещений  $u(x)$  получаем связанную систему трёх нелинейных уравнений:

$$P_{,\xi\xi} + S_{xx}(1 - \cos u)_{,\xi} = 0, \quad (4.53)$$

$$\frac{\Delta P}{H} + \frac{\eta_1}{h^2} V_{,\xi\xi} - \frac{S_{yx}}{h}(1 - \cos u)_{,\xi} = 0, \quad (4.54)$$

$$\frac{k_1}{h^2} u_{,\xi\xi} - \left(p - \frac{S_{yx}}{h} V_{,\xi}\right) \sin u = 0, \quad (4.55)$$

Из (4.54) и (4.55) находим давление:

$$P = P_0 - \frac{\Delta P}{H} y - S_{xx} \int_0^{\xi} (1 - \cos u) d\xi \quad (4.57)$$

и поступательную скорость

$$v = \xi(1 - \xi) + \Delta v, \quad (4.58)$$

$$\Delta v = \bar{A} \left[ \int_0^{\xi} (1 - \cos u) d\xi - \xi \int_0^1 (1 - \cos u) d\xi \right]. \quad (4.59)$$

Здесь

$$P_0 = \text{const}, \quad \xi = \frac{x}{h}, \quad v = \frac{V(x)}{V}, \quad \bar{V} = \frac{\Delta P h^2}{2H\eta_1}, \quad \bar{A} = \frac{V_S}{V}. \quad (4.60)$$

Решение (4.58) удовлетворяет условиям “прилипания” на нижней и верхней поверхностях. Для случая “проскальзывания”

$$v = v_0 + \xi(\delta - \xi) + \Delta v. \quad (4.61)$$

Здесь

$$v_0 = \beta \bar{A} [\sigma_0 + 1 - \cos u(0)], \quad (4.62)$$

$$\delta = 1 - 2\beta + \beta \bar{A} [\cos u(0) - \cos u(1)], \quad (4.63)$$

а постоянная

$$\sigma_0 = \frac{1}{\bar{A}} - \int_0^1 (1 - \cos u) d\xi - \frac{2\beta}{\bar{A}} + \beta [\cos u(0) - \cos u(1)]. \quad (4.64)$$

Из (4.57) видно, что в текущей структурированной жидкости, в отличие от ньютоновской, давление изменяется по поперечному сечению зазора. Зависимость  $P(\xi)$  однозначно определяется изменением структуры жидкости по сечению плоскости капилляра.

Поле поступательной скорости, удовлетворяющее условиям “прилипания”, как видно из (4.58), есть сумма двух слагаемых: скорости ньютоновской жидкости и слагаемого  $\Delta v$ , которое также однозначно определяется изменением структуры жидкости по сечению зазора. В случае “проскальзывания” дополнительно появляется слагаемое  $v_0$ .

Как в случае “прилипания”, так и в случае “проскальзывания” отличия в течении структурированной жидкости от ньютоновской обусловлены изменением ближнего порядка молекул жидкости по ширине слоя и описываются вектором

микросмещений  $u(\xi)$ .

Для нахождения микросмещений получаем двойное синус-Гордон уравнение с переменной амплитудой.

$$u_{,\xi\xi} = (p_1 + a\xi) \sin u + p_2 \sin 2u, \quad (4.65)$$

$$\frac{p_1}{2p_2} = \bar{p} - 1 - \sigma_0, \quad a = \frac{4p_2}{A}, \quad \bar{p} = \frac{ph^2}{k_1}. \quad (4.66)$$

Постоянная  $\sigma_0$  должна удовлетворять соотношению (4.30), если на поверхностях выполняются условия “прилипания” и соотношению (4.36), если реализуются условия проскальзывания.

**4.5. Реологические особенности вязкопластической жидкости.** Реологические свойства вязкопластической жидкости определяются материальными параметрами самой жидкости ( $\eta_{ikmn}$ ,  $k_{ikmn}$ ,  $S_{ik}$ ), величиной потенциального барьера  $p$ , описывающего взаимодействие молекул жидкости с твёрдой поверхностью, длиной “проскальзывания”  $l_s$ , а также внешними параметрами: геометрическими размерами области течения  $h$ , внешним силовым воздействием на жидкость  $V_h$ ,  $\Delta P/H$ . Перечисленные параметры можно объединить в три коэффициента  $V_p$ ,  $V_s$ ,  $V_k$ , имеющие размерность скорости. Для течений Куэтта и Пуазейля они совместно с  $V_h$  и  $\bar{V}$  описывают реологические свойства структурированной жидкости. В случае простого сдвигового течения структурированная жидкость обнаруживает следующие особенности, отличающие её от ньютоновской жидкости.

**1.** Простое сдвиговое течение ньютоновской жидкости реализуется при отсутствии нормальных напряжений в слое жидкости. Структурированная жидкость, в отличие от ньютоновской, обнаруживает эффект нормальных напряжений. Последние обусловлены взаимодействием молекул жидкости с твёрдой поверхностью, а также изменением ближнего порядка между молекулами жидкости по толщине слоя. В силу этого поступательная скорость структурированной жидкости содержит добавочное слагаемое  $\Delta v$ .

**2.** Вязкопластическая жидкость проявляет неоднородную текучесть по толщине слоя. Она способна к фрагментации, т.е. слой жидкости между ограничивающими твёрдыми поверхностями может разделиться на отдельные фрагменты (подслои). Фрагменты заметно различаются по текучести. Фрагментация также связана с учётом структуры жидкости. Последняя в разработанной модели описывается вектором  $u(\mathbf{r}, t)$ . Каждому  $u(\mathbf{r}, t)$  соответствует своя структура, своё локальное значение поступательной скорости и закон её изменения по толщине слоя.

На Рис. 2 для течения Куэтта изображён профиль поступательной скорости  $v$  по сечению плоского капилляра. Скорость рассчитывалась по формуле (4.29), а  $u(\xi)$  по формуле (4.46) при следующих значениях параметров:  $(V_h - V_p)/V_s = -5$ ,  $V_h/V_s = 0.62$ ,  $v = 0.99$ ,  $n = 0.98$  (Рис. 2, слева);  $(V_h - V_p)/V_k = -50$ ,  $V_h/V_s = 0.41$ ,  $v = 0.99$ ,  $n = 0.99$  (Рис. 2, справа).

Видно, что вблизи нижней поверхности (слева), или обеих твёрдых поверхностей (справа) подслои жидкости оказываются малоподвижными (иммобилизованы). Середина слоя течёт подобно ньютоновской жидкости, но с другим наклоном. Наклон зависит от свойств жидкости и условий течения.



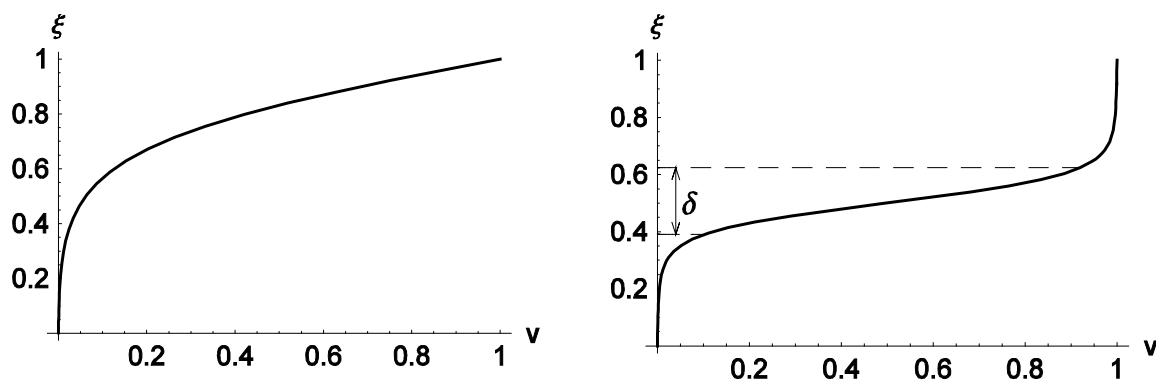


Рис. 2. Распределение скорости жидкости по сечению плоского капилляра.

Модель предсказывает образование фрагментов и в глубине слоя жидкости. Это видно из Рис. 3, на котором показано изменение поступательной скорости по сечению капилляра.

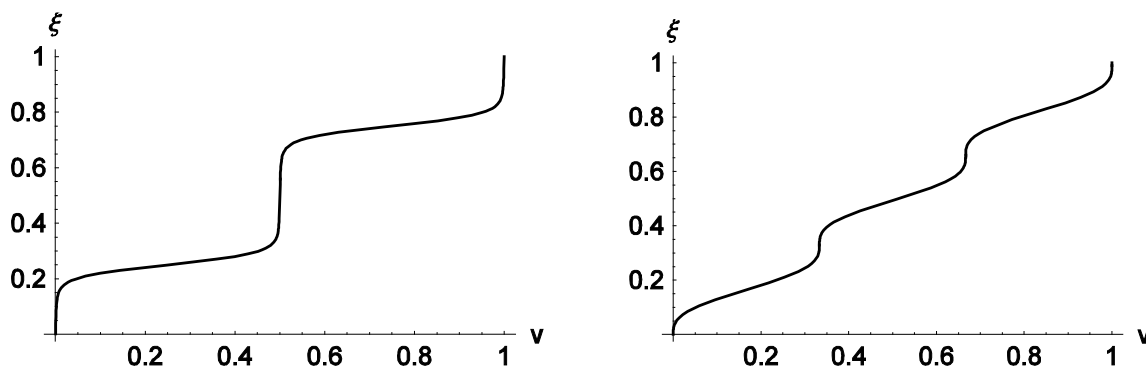


Рис. 3. Расслоение жидкости на фрагменты с образованием слоёв разной подвижности.

Число фрагментов определяется величиной  $f = (V_h - V_p)/V_k$ . Слева:  $(V_h - V_p)/V_s = -270$ ,  $V_h/V_s = 0.35$ ,  $\nu = 0.99$ . Справа  $(V_h - V_p)/V_s = -0.04$ ,  $V_h/V_k = 2.8$ ,  $\nu = 0.15$ .

На Рис. 4 для течения Пуазейля показаны профили скорости по ширине капилляра.

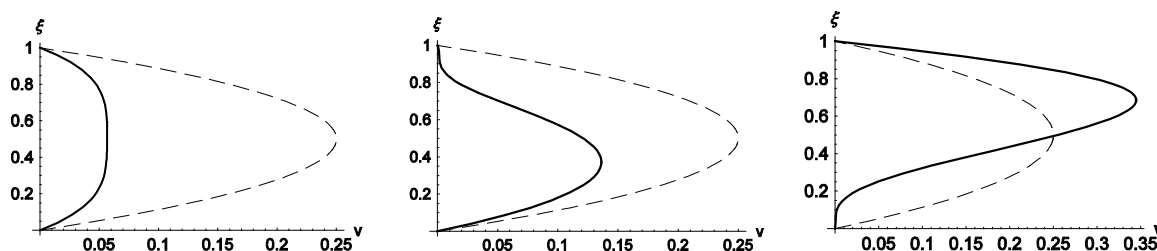


Рис. 4. Профили поступательной скорости для течения Пуазейля.

Уравнение (4.65) интегрировалось численно. Поступательная скорость находилась также численно по формуле (4.58). Расчёты выполнялись для разных значений параметров:  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = 1$ ,  $a = 2$ ,  $\tilde{A} = 0.6$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = \pi$  (Рис. 4, слева);  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 10$ ,  $a = 20$ ,  $\tilde{A} = 0.6$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = \pi$  (Рис. 4, в центре);  $p_1 = -15$ ,  $p_2 = 1$ ,  $a = 2$ ,  $\tilde{A} = 1.85$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  (Рис. 4, справа). Пунктирной линией показан профиль скорости ньютоновской жидкости. Из рисунков видно, что реологические особенности жидкости, установленные в случае простого сдвигового течения, проявляются и в случае течения Пуазейля. Качественно они согласуются с результатами расчётов, выполненных методом молекулярной динамики [30].

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 09-08-00634-а, № 10-01-00243-а.*

### Литература

- [1] А.С. Ахматов, *Молекулярная физика граничного трения* (Физматгиз, М., 1963).
- [2] Г.И. Фукс // *Заводская лаборатория* **12** (1955) 1455.
- [3] З.М. Зорин, В.Д. Соболев, Н.В. Чураев // *Докл. АН СССР* **193**, (1970) 630.
- [4] Б.В. Дерягин, Б.В. Железный, З.М. Зорин, В.Д. Соболев, Н.В. Чураев, В кн.: *Поверхностные силы в тонких плёнках и устойчивость коллоидов* (Наука, М., 1974), с. 90.
- [5] Б.В. Дерягин, А.С. Титиевская // *Докл. АН СССР* **89**(1953) 1041.
- [6] Б.В. Дерягин, Н.В. Чураев // *Коллоид. журн.* **38** (1976) 438.
- [7] Б.В. Дерягин, Н.В. Чураев // *Коллоид. журн.* **37** (1975) 1075.
- [8] Б.В. Дерягин, Я.И. Рабинович, Н.В. Чураев // *Изв. АН СССР, сер. хим.* **8** (1982) 1743.
- [9] Ю.М. Поповский, Б.А. Алтоиз // *Коллоид. журн.* **43** (1981) 1177.
- [10] D.J. Mitchell, B.W. Ninham, B.A. Pailthorpe // *J. Colloid and Interface Sci.* **64** (1978) 194.
- [11] D.J. Mitchell, B.W. Ninham, B.A. Pailthorpe // *J. Chem. Soc. Faraday Trans. Part II* **74** (1978) 1098.
- [12] D.W. Bechert, M. Bruse, W. Hage, R. Meyer // *Naturwissenschaften* **87** (2000) 151.
- [13] D.J. Beebe, G.A. Mensing, G.M. Walker // *Ann. Rev. Biomed. Eng.* **4** (2002) 261.
- [14] Z.R. Li, G.R. Liu, J. Han, Y. Cheng, Y.Z. Chen, J.-S. Wang, N.G. Hadjiconstantinou // *Phys. Rev.E* **80** (2009) 041911.
- [15] Ch.-M. Ho, Yu-Ch. Tai // *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30** (1998) 579.
- [16] H.A. Stone, A.D. Stroock, A. Ajdari // *Ann. Rev. Fluid Mech.* **36** (2004) 381.
- [17] S. Wu, Q. Lin, Y. Yuen, Y.-C. Tai // *Sensors and Actuators A* **89** (2001) 152.
- [18] G.G. Stokes, In: *Mathematical and Physical Papers by George Gabriel Stokes*, ed. by G.G. Stokes (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1966), Vol. 1, p. 75.
- [19] C.L.M.H. Navier // *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* **6** (1823) 389.
- [20] P. Mela, N.R. Tas, A. van der Berg, J.E. ten Elshof, In: *Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology*, ed. by H.S. Nalwa (American Scientific Publishers, Philadelphia, 2004), Vol. 6, p. 739.
- [21] E. Lauga, M.P. Brenner, H.A. Stone, In: *Handbook of Experimental Fluid Mechanics*, eds. by C. Tropea, A. Yarin, and J.F. Foss (Springer, New York, 2007), Part C, p. 1219.
- [22] B.-Y. Gao, J. Sun, M. Chen, Z.-Y. Guo // *Int. J. Mol. Sci.* **10** (2009) 4638.
- [23] R.S. Voronov, D.V. Papavassiliou, L.L. Lee // *Ind. Eng. Chem. Res.* **47** (2008) 2455.
- [24] C. Neto, D.R. Evans, E. Bonaccorso, H.J. Butt, V.S.J. Craig // *Rep. Prog. Phys.* **68** (2005) 2859.
- [25] T.M. Squires, S.R. Quake // *Rev. Mod. Phys.* **77** (2005) 977.

- [26] Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин, Ю.В. Павлов // *Теор. Матем. Физика* **158** (2009) 370.  
[27] Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин, Ю.В. Павлов // *Нелинейный мир* **7** (2009) 513.  
[28] E.L. Aero, A.N. Bulygin, Yu.V. Pavlov, In: *Proc. Int. Conf. "Days on Diffraction 2009"*, (St.Petersburg, Russia, 2009), p. 7.  
[29] E.L. Aero, A.N. Bulygin, Yu.V. Pavlov, In: *Proc. Int. Conf. "Days on Diffraction 2010"*, (St.Petersburg, Russia, 2010), p. 10.  
[30] А.К. Абрамян, Н.М. Бессонов, Д.А. Индейцев, Л.В. Миранцев // *Механика твёрдого тела* **3** (2010) 87.

## HYDRODYNAMICS OF LIQUID NANOLAYERS

E.L. Aero, A.N. Bulygin\*, Yu.V. Pavlov

Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,  
Bolshoj 61, Vasilievskii Ostrov, St. Petersburg 199178, Russia

\*e-mail: bulygin\_an@mail.ru

**Abstract.** A model of liquid nanolayers is developed. The model takes into account an ability of a liquid in nano-clearances to accept anisotropy under action of a hydrodynamical stream, and also to borrow pseudo-crystal structure under action of a crystal substrate. Two fields are introduced: a field of macroscopic velocities  $V(r,t)$  and a field of micro-shifts  $u(r,t)$ . The dissipative phenomena are described by the field  $V(r,t)$ . The field  $u(r,t)$  describes the structural changes caused by displacement of neighboring atoms in short-range order domains. The fields  $V(r,t)$  and  $u(r,t)$  are found from two vector equations. The first equation is a generalization of the Navier-Stokes equation. The second equation is a generalization of the sine-Gordon equation. The steady-state (Couette and Poiseuille) flows of the structured liquid in a gap between parallel planes are considered. The analysis of solutions allows to establish distinctions in rheological properties of Newtonian and the structured liquids.

### References

- [1] A.S. Akhmatov, *Molecular physics of boundary friction* (Fizmatgiz, Moscow, 1963).  
[2] G.I. Fuks // *Zavodskaya Laboratoriya* **12** (1955) 1455.  
[3] Z.M. Zorin, V.D. Sobolev, N.V. Churaev // *Doklady Akad. Nauk USSR* **193** (1970) 630.  
[4] B.V. Deryagin, B.V. Zhelezniy, Z.M. Zorin, V.D. Sobolev, N.V. Churaev, In.: *Surface forces in thin films and stability of colloids* (Nauka, Moscow, 1974), p. 90.  
[5] B.V. Deryagin, A.S. Titievskaya // *Doklady Akad. Nauk USSR* **89** (1953) 1041.  
[6] B.V. Deryagin, N.V. Churaev // *Kolloidnii Zhurnal* **38** (1976) 438.  
[7] B.V. Deryagin, N.V. Churaev // *Kolloidnii Zhurnal* **37** (1975) 1075.  
[8] B.V. Deryagin, Ya.I. Rabinovich, N.V. Churaev // *Изв. АН СССР, сер. хим.* **8** (1982) 1743.  
[9] Yu.M. Popovskii, B.A. Altoiz // *Kolloidnii Zhurnal* **43** (1981) 1177.  
[10] D.J. Mitchell, B.W. Ninham, B.A. Pailthorpe // *J. Colloid and Interface Sci.* **64** (1978) 194.  
[11] D.J. Mitchell, B.W. Ninham, B.A. Pailthorpe // *J. Chem. Soc. Faraday Trans. Part II* **74** (1978) 1098.

- [12] D.W. Bechert, M. Bruse, W. Hage, R. Meyer // *Naturwissenschaften* **87** (2000) 151.
- [13] D.J. Beebe, G.A. Mensing, G.M. Walker // *Ann. Rev. Biomed. Eng.* **4** (2002) 261.
- [14] Z.R. Li, G.R. Liu, J. Han, Y. Cheng, Y.Z. Chen, J.-S. Wang, N.G. Hadjiconstantinou // *Phys. Rev.E* **80** (2009) 041911.
- [15] Ch.-M. Ho, Yu-Ch. Tai // *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30** (1998) 579.
- [16] H.A. Stone, A.D. Stroock, A. Ajdari // *Ann. Rev. Fluid Mech.* **36** (2004) 381.
- [17] S. Wu, Q. Lin, Y. Yuen, Y.-C. Tai // *Sensors and Actuators A* **89** (2001) 152.
- [18] G.G. Stokes, In: *Mathematical and Physical Papers by George Gabriel Stokes*, ed. by G.G. Stokes (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1966), Vol. 1, p. 75.
- [19] C.L.M.H. Navier // *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* **6** (1823) 389.
- [20] P. Mela, N.R. Tas, A. van der Berg, J.E. ten Elshof, In: *Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology*, ed. by H.S. Nalwa (American Scientific Publishers, Philadelphia, 2004), Vol. 6, p. 739.
- [21] E. Lauga, M.P. Brenner, H.A. Stone, In: *Handbook of Experimental Fluid Mechanics*, eds. by C. Tropea, A. Yarin, and J.F. Foss (Springer, New York, 2007), Part C, p. 1219.
- [22] B.-Y. Gao, J. Sun, M. Chen, Z.-Y. Guo // *Int. J. Mol. Sci.* **10** (2009) 4638.
- [23] R.S. Voronov, D.V. Papavassiliou, L.L. Lee // *Ind. Eng. Chem. Res.* **47** (2008) 2455.
- [24] C. Neto, D.R. Evans, E. Bonaccorso, H.J. Butt, V.S.J. Craig // *Rep. Prog. Phys.* **68** (2005) 2859.
- [25] T.M. Squires, S.R. Quake // *Rev. Mod. Phys.* **77** (2005) 977.
- [26] E.L. Aero, A.N. Bulygin, Yu.V. Pavlov // *Theor. Math. Phys.* **158** (2009) 313.
- [27] E.L. Aero, A.N. Bulygin, Yu.V. Pavlov // *Nelineinii Mir* **7** (2009) 513.
- [28] E.L. Aero, A.N. Bulygin, Yu.V. Pavlov, In: *Proc. Int. Conf. "Days on Diffraction 2009"* (St.Petersburg, Russia, 2009), p. 7.
- [29] E.L. Aero, A.N. Bulygin, Yu.V. Pavlov, In: *Proc. Int. Conf. "Days on Diffraction 2010"* (St.Petersburg, Russia, 2010), p. 10.
- [30] A.K. Abramyan, N.M. Bessonov, D.A. Indeitsev, L.V. Mirantsev // *Mechanics of Solids* **45** (2010) 379.