

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОЛОЧКИ ИЗ ИЗОТРОПНОГО РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ГРАФИТА С ПОМОЩЬЮ ОБЪЕМНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ СВЯЗАННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ И ТЕМПЕРАТУР

А.А. Трещёв, М.Ю. Делягин *

ФГБОУ ВПО Тульский государственный университет,

пр. Ленина 92, г. Тула, 300012, Россия

*e-mail: m.delyagin@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена методика построения нового конечного элемента для расчета изотропных разносопротивляющихся материалов, находящихся в температурном поле. Представлены данные расчетов сферической оболочки из графита с помощью метода конечных элементов.

1. Введение

Одной из основных задач развития промышленности России является создание новых высокоэффективных материалов, таких как графиты, композиты, наноматериалы, углепластики, стеклопластики. Их свойства зачастую противоречат классическим теориям механики деформируемого твердого тела [1, 2, 3]. Для успешного внедрения прогрессивных материалов и экономичных пространственных конструкций, выполненных из них, необходимо применение новых математических моделей расчета, которые учитывают зависимость свойств материала от вида реализуемого в точке напряженного состояния, связанность полей напряжений и температур.

Расчет конструкций, в частности оболочек, ведется, как известно, на базе прикладных технических теорий, позволяющих перейти от трехмерной задачи к двумерной, что существенно упрощает как математическую, так и чисто вычислительную процедуру. Очевидно, что реализация подобного подхода, в основе которого лежит исследование поведения срединной поверхности оболочки, в МКЭ обуславливает появление специфических конечных элементов. В большинстве случаев для построения матриц, характеризующих такие элементы, используются соответствующие соотношения теории плит и оболочек, основанные на априорных гипотезах об изменении напряженно-деформированного состояния по толщине. Имеется целый ряд таких теорий, отличающихся характером и степенью обоснованности вводимых допущений. Наиболее распространенными из них являются теория тонких пластин и оболочек Кирхгофа-Лява, теория пластин и оболочек средней толщины С.П. Тимошенко, Э. Рейсснера и т.д. Однако не все применяемые плиты и оболочки, можно отнести к классу тонких или средней толщины, во-первых, из-за их геометрических размеров, во-вторых, из-за существенной неоднородности материала и его нелинейного поведения, наличия арматуры, трещин и т.д. Более того, с точки зрения МКЭ каждый конечный элемент, являясь частью системы, должен

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

а типовой блок определяется по формуле [4]:

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D][B]^{(k)} dV. \quad (4)$$

Здесь $[B]$ – так называемая матрица деформаций, которая, в связи с блочной структурой вектора $\{q\}_j$, также блочная: $[B] = \left[[B]^{(1)} [B]^{(2)} \dots [B]^{(k)} \dots [B]^{(n)} \right]$,

где $[B]^k = [\Phi][C]^{(k)}$, матрица дифференциальных операторов

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial z \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial z & \partial / \partial y \\ \partial / \partial z & 0 & \partial / \partial x \end{bmatrix},$$

$[C]$ – матрица интерполяционных функций описанная ниже.

Для того чтобы построить матрицы для элемента, необходимо выразить перемещения точек внутри элемента через перемещения его узлов, т.е. установить зависимость $\{u\} = [C]\{q\}_i = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(n)} \right] \{q\}_i$, где

$\{u\} = \{u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\}$ – вектор перемещений. Матрица интерполяционных функций для тетраэдра будет иметь четыре блока по числу узлов:

$$[C] = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} [C]^{(4)} \right], \quad (5)$$

каждый из которых равен $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$, где E_3 – единичная матрица третьего порядка.

Закон изменения перемещений u , v и w по области элемента примем в виде линейных функций координат, т.е.

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z;$$

$$v(x, y, z) = \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z; \quad (6)$$

$$w(x, y, z) = \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z.$$

$$C_1(x, y, z) = \frac{V_{m234}}{V_i}, C_2(x, y, z) = \frac{V_{m134}}{V_i}, C_3(x, y, z) = \frac{V_{m124}}{V_i}, C_4(x, y, z) = \frac{V_{m123}}{V_i}, \quad (10)$$

где

$$V_{m234} = \frac{(a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)}{6}, V_{m134} = \frac{(a_2 + b_2x + c_2y + d_2z)}{6}, V_{m124} = \frac{(a_3 + b_3x + c_3y + d_3z)}{6},$$

$$V_{m123} = \frac{(a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)}{6}.$$

Функции, определенные соотношением (10), называют объемными L-координатами и являются нормализованными координатами для тетраэдра. Таким образом,

$$L_1 = C_1(x, y, z); L_2 = C_2(x, y, z); L_3 = C_3(x, y, z); L_4 = C_4(x, y, z). \quad (11)$$

Значения L-координат находятся в интервале 0-1, они удовлетворяют требованиям

$$L_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (12)$$

При этом из четырех L-координат только три являются независимыми, поскольку они связаны между собой выражением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (13)$$

Далее L-координаты будут использоваться для интерполяции узловых перемещений в область тех конечных элементов, которые отображаются на тетраэдр.

Каждый из четырех блоков матрицы деформаций запишем так

$$[B]^{(k)} = [\Phi] C_k(x, y, z) = \frac{1}{6V_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix}, \quad (k=1, 2, 3, 4). \quad (14)$$

Матрицу, осуществляющую связь между напряжениями и деформациями при объемном напряженном состоянии $\sigma_{ij} = [D]e_{ij}$ запишем в общем виде $[D] = [D_{ij}]$ (причем $D_{ij} = D_{ji}$), где $i, j = 1, \dots, 6$. При этом будем исходить из предположения, что эта матрица постоянна в пределах элемента.

Подставив (14) и матрицу $[D]$ в выражение (4) и осуществив интегрирование, получим типовой блок матрицы жесткости элемента в виде тетраэдра:

$$[K]_{il}^{(k)} = \frac{1}{36V_i^2} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

$$\text{где } R_k = B\alpha_k\sigma_k + D[(\alpha_k + \alpha_n)\sigma_n + (\alpha_k + \alpha_m)\sigma_m] + 3E(1 - \alpha_k^2)\alpha_n\sigma_m + \\ + \left(\frac{B}{2} - D\right)[(1 - \alpha_k^2)\sigma_k - \alpha_n^2\sigma_n - \alpha_m^2\sigma_m]\alpha_k + (A_t + B_t\alpha_k)\theta^0.$$

В соотношениях (17) и (19) линейные члены отделены от нелинейных (R_{ij}, R_k) . Здесь следует иметь в виду, что характер квазилинейных функций не позволяет непосредственно перейти от уравнений вида $e_{ij} = e_{ij}(\sigma_{km})$ к зависимостям $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(e_{km})$, так как $R_{ij} = R_{ij}(\sigma_{km})$. Поэтому обращая линейные члены уравнений (17), получим тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = (D_1 + D_2)e_{ij} - 3D_2e\delta_{ij} - D_3\theta^0\delta_{ij} - H_{ij}, \quad (21)$$

$$\text{где } D_1 = \frac{A+C}{(A-C)(A+2C)} = \frac{\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2}{2\tilde{b}_1\tilde{b}_2}; D_2 = \frac{C}{(A-C)(A+2C)} = \frac{2\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2\tilde{b}_1\tilde{b}_2}; D_3 = \frac{A_t}{A+2C} = \frac{b_{t2}}{2\tilde{b}_1};$$

$$e = e_{ij}\delta_{ij}/3; H_{ij} = (D_1 + D_2)R_{ij} - 3D_2R_0\delta_{ij}; R_0 = \left(\frac{(b_4 - b_3)\xi^3 + b_5\eta^3 \cos 3\varphi +}{+\xi(3b_3 - 2b_4) + b_4/\xi} \right) \frac{\sigma}{3} + \frac{b_{t1}\xi\theta^0}{3}.$$

Выделив компоненты матрицы податливостей из зависимостей (17) и (19) закон упругости можно привести к форме предложенной А.А. Трещёвым [5, 6]:

$$e_k = A_{km}\sigma_m + A_k^\theta\theta^0; \quad (k, m = 1, 2, 3), \quad (22)$$

$$\text{где } A_{ii} = A + B\alpha_i + (0.5B - D)[\alpha_i - (\alpha_i^3 + \alpha_j^3 + \alpha_k^3)] - 2E\alpha_i\alpha_j\alpha_k; \quad (i \rightarrow j \rightarrow k), \quad A_{ij} = A_{ji};$$

$$A_{ij} = C + E\alpha_k(1 + \alpha_k^2) + D(\alpha_i + \alpha_j), \quad (i \neq j); \quad A_i^\theta = A_t + (2\alpha_i - \alpha_i^3 - \alpha_i\alpha_j^2 - \alpha_i\alpha_k^2)B_t.$$

$$e_{ij} = A_{ijkm}\sigma_{km}; \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3), \quad (23)$$

$$\text{где } A_{ijkm} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1313} \end{bmatrix},$$

$$A_{1111} = \frac{2}{9}b_1 + \frac{4}{9}b_2 + \frac{1}{9}\alpha_{11}\eta^2b_3 + \frac{2}{9}\left(\frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{13}^2}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{23}^2}{\alpha_{11}} - \frac{1}{2}\alpha_{11}\eta^2 + \alpha_{11}\right)b_4 + \\ + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{13}^2}{\alpha_{11}} - 2\frac{\alpha_{23}^2}{\alpha_{11}} + \frac{2}{3}\alpha_{11} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3\varphi\eta^3\right)b_5 + \frac{1}{3}\left(b_{t1}\frac{1}{S_0} + b_{t2}\frac{1}{\sigma_{11}}\right)\theta^0;$$

$$\begin{aligned}
A_{1313} = & \frac{2}{3}b_2 + \frac{1}{9}(\alpha_{11}\eta^2 + \alpha_{22}\eta^2 + \alpha_{33}\eta^2 - \alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{33})b_3 + \\
& + \frac{1}{9}(2\alpha_{11} + 2\alpha_{22} + 2\alpha_{33} - \alpha_{11}\eta^2 - \alpha_{22}\eta^2 - \alpha_{33}\eta^2)b_4 + \\
& + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\alpha_{11} - 2\alpha_{22} + \alpha_{33} + 3\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}}{\alpha_{13}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3\varphi\eta^3\right)b_5 + \frac{1}{3}b_{11}\frac{1}{S_0}\theta^0;
\end{aligned}$$

Тогда искомая матрица $[D]$ связывающая напряжения и деформации будет вычисляться по формуле:

$$[D] = [A_{ijkm}]^{-1} \quad (24)$$

Очевидно, что зависимости (23) представлены таким образом, что функции, учитывающие вид напряженного состояния фигурируют лишь в выражениях диагональных компонентов тензора податливостей A_{ijkm} . С другой стороны, в уравнениях (22) эти функции включены и в состав побочных членов матрицы A_{km} . Заметим, что формы записи соотношений (22) и (23) совпадают с обобщенным законом Гука для структурно-анизотропного материала. Однако коэффициенты податливостей здесь зависят от вида напряженного состояния.

3. Результаты расчета

Для апробации предложенной КЭ модели была рассчитана жестко заземленная полая сферическая оболочка радиусом в плане 1 м со стрелой подъема 0.08 м и толщиной 0.03 м из конструкционного графита АРВ с характеристиками: $E^+ = 0.375 \text{ ГПа}$, $E^- = 0.613 \text{ ГПа}$, $\nu^+ = 0.2$, $\nu^- = 0.35$, $\alpha_{t1}^+ = 4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_{t1}^- = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Максимальная поперечная нагрузка была принята равной 12 кПа, чтобы прогибы были сопоставимыми с толщиной оболочки. Геометрическая нелинейность учитывалась расчетом по деформированной схеме. Результаты решения рассматривались в сферической системе координат. Начальная температура оболочки 300 К. На верхней поверхности температура понижалась до 290 К, а на нижней повышалась до 320 К.

Для оценки влияния различных физических эффектов на напряженно-деформированное состояние сравнивались четыре различных варианта постановки задачи: с учетом связанности, разнсопротивляемости и геометрической нелинейности (на рисунках 2-4 сплошная линия), с учетом связанности, геометрической нелинейности, но с осредненными из опытов на одноосные растяжение и сжатие механическими характеристиками (на рисунках 2-4 штрихпунктирная линия), с учетом связанности и разнсопротивляемости без геометрической нелинейности (на рисунках 2-4 сплошная линия с маркерами), с учетом разнсопротивляемости и геометрической нелинейности, но без учета связанности (на рисунках 2-4 штриховая линия).

На рисунке 2 показаны прогибы оболочки. Расхождение в величине максимального прогиба за счет разнсопротивляемости составило 45 %, за счет геометрической нелинейности – 24 %. Влияние связанности на прогибы оболочки, выполненной из графита АРВ, не превышает 3 %.

На рисунке 3 представлено распределение радиальных напряжений на верхней и нижней поверхностях оболочки вдоль радиуса. Поправки в радиальные напряжения за

составляет 33 %. Учет связанности полей напряжений и температур вносит поправки до 4 % в распределение окружных напряжений.

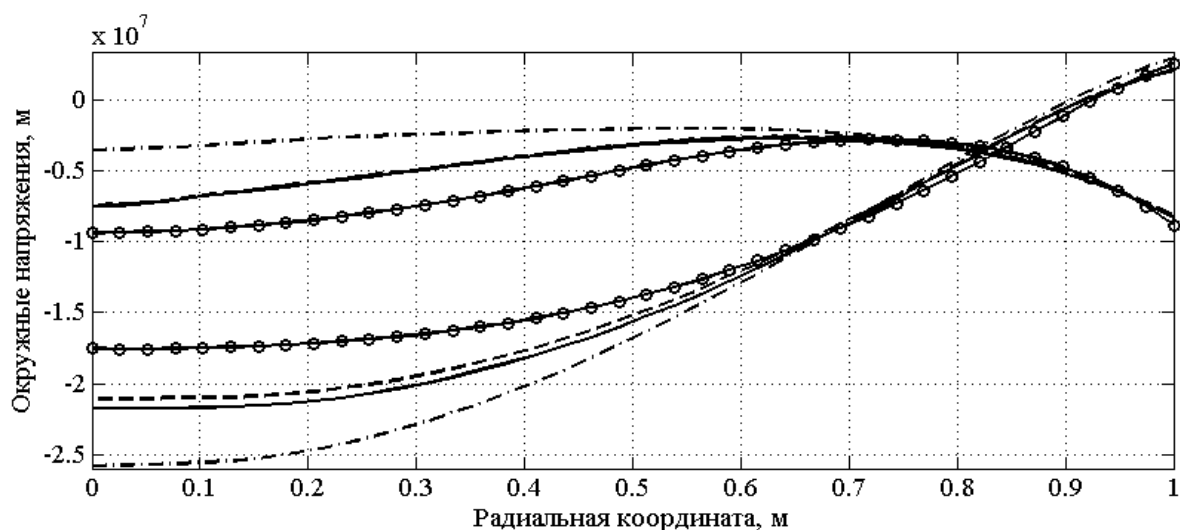


Рис. 4. Окружные напряжения.

4. Выводы

На основании результатов проведенной работы можно сделать вывод, что рассматриваемые физические эффекты вносят значительные коррективы в НДС конструкций. Поправки в величины прогибов и напряжений достигают 56%, что существенно влияет на несущую способность конструкции. Эффект разносопротивляемости проявляется наиболее сильно в конструкциях с более выраженными различиями в термомеханических характеристиках при растяжении и сжатии и усиливается в области конечных перемещений [7, 8]. Постановка задачи с учетом связанности полей напряжений и температур обеспечивает повышенную точность вычисления температурных напряжений, что крайне важно в графитовых оболочках, применяемых в конструкциях энергетической отрасли. Таким образом, учет рассмотренных физических эффектов и геометрической нелинейности позволит обеспечить должный уровень безопасности и экономичности оболочек из новых эффективных материалов, а применение метода конечных элементов значительно упростит расчет конструкций более сложной геометрической формы.

Литература

- [1] P.E. Hart // *Carbon* **10** (1972) 233.
- [2] C.W. Bert, In: *Mechanics of bimodulus materials*, ed. by C.W. Bert (New York, 1979), p. 17.
- [3] Н.М. Матченко, А.А. Трещёв, *Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения* (ТулГУ, Тула, 2000).
- [4] С.Ф. Клованич, *Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики* (Світ геотехніки, Запорожье, 2009).
- [5] Н.М. Матченко, А.А. Трещёв, *Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Прикладные задачи теории упругости* (ТулГУ, Тула, 2004).
- [6] А.А. Трещёв, *Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения* (ТулГУ, Тула, 2008).
- [7] А.А. Трещёв, М.Ю. Делягин // *Транспортное строительство* **2** (2013) 24.
- [8] Д.С. Чигинский, А.А. Трещёв, В.Г. Теличко // *Известия ТулГУ. Технические науки* **2** (2011) 494.

**SIMULATION OF SHELL
MADE OF ISOTROPIC DIFFERENT RESISTANCE GRAPHITE
USING VOLUMETRIC FINITE ELEMENTS CONSIDERING
CONNECTEDNESS OF STRESSES AND TEMPERATURES**

A.A. Treschov, M.Yu. Delyagin*

Tula State University, Lenin Prospect 92,

Tula, 300012, Russian Federation

*e-mail: m.delyagin@yandex.ru

Abstract. The method of construction of a new finite element for calculation different resistant material in the temperature field has been considered. The data of calculations of a spherical shell of graphite using finite element method have been presented.

References

- [1] P.E. Hart // *Carbon* **10** (1972) 233.
- [2] C.W. Bert, In: *Mechanics of bimodulus materials*, ed. by C.W. Bert (New York, 1979), p. 17.
- [3] N.M. Matchenko, A.A. Treschov, *The Theory of Deformation of Different Resistant Materials. Determining Correlations* (TSU, Tula, 2000).
- [4] S.F. Klovanich, *The finite element in non-linear problems of mechanical engineering* (Svit geotekhniki, Zaporozhye, 2009).
- [5] N.M. Matchenko, A.A. Treschov, *The Theory of Deformation of Different Resistant Materials. Applied Tasks of the Theory of elasticity* (TSU, Tula, 2004).
- [6] A.A. Treschov, *The Theory of Deformation and durabilities for the Materials, sensitive to a kind of an stress condition. Determining Correlations* (TSU, Tula, 2008)
- [7] A.A. Treschov, M.Yu. Delyagin // *Transport construction* **2** (2013) 24.
- [8] D.S. Chiginskiy, A.A. Treschov, V.G. Telichko // *Izvestiya TulGU. Technical Sciences* **2** (2011) 494.