

## ДЕФЕКТЫ В КОНТИНУАЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ: КЛАССИФИКАЦИЯ, ПОЛЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ

А.Л. Колесникова<sup>1</sup>, Р.М. Сорока<sup>2,3</sup>, А.Е. Романов<sup>2,4\*</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Большой пр. 61, В.О., Санкт-Петербург, 199178, Россия

<sup>2</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,

Политехническая 26, Санкт-Петербург, 194021, Россия

<sup>3</sup>Факультет электроники, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина),

ул. Профессора Попова 5, Санкт-Петербург, 197376, Россия

<sup>4</sup>Факультет оптико-информационных систем и технологий, Санкт-Петербургский национальный

исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики,

Кронверкский пр. 49, Санкт-Петербург, 197101, Россия

\*e-mail: aer@mail.ioffe.ru

**Аннотация.** В рамках континуальной механики представлена классификация дефектов - внутренних источников упругих искажений в твердых телах. Классификация основана на размерности области задания собственной (пластической) дилатации дефекта. С помощью упругих полей бесконечно малых дислокационных петель получены аналитические выражения для упругих полей различных дефектов: локализованного отрезка, луча, круговой дилатационной нити и кругового дилатационного диска. Поля осесимметричных дефектов даны в виде интегралов Лифшица-Ханкеля.

### 1. Введение

Теория дефектов сплошной упругой среды, с одной стороны, является математическим описанием упругого поведения дефектов в твердых телах, а с другой стороны, представляет собой инструмент для моделирования упругопластического поведения материалов, испытывающих локальные превращения вследствие механических или термических обработок. Своим современным видом теория дефектов обязана усилиями многих ученых, начиная с Вольтерра [1], который впервые представил упругие модели дислокаций и дисклинаций. Основу теории заложили фундаментальные работы Эшелби [2-4], Кренера (см. в [3]), Кроупы [5], Инденбома [6], Де Вита [7], Хирта [8], Лоте [8], Теодосиу [9], Муры [10] и многих других.

На различных этапах построения теории дефектов важными становились различные ее аспекты. В настоящее время актуальными проблемами являются граничные задачи и задачи моделирования дефектов сложной формы, непосредственно связанные с физико-механическими проблемами наногетероструктур, нанопроволок, наночастиц, нанокомпозитов и прочих материалов, состоящих из нанобластей.

Известно, что для решения граничных задач эффективно применять метод виртуальных дефектов (см., например, [11-13]), основанный на методе поверхностных дислокаций [14, 15]. Этот метод оперирует упругими полями распределенных виртуальных источников упругих полей для формирования граничных интегральных

уравнений, решение которых является решением граничной упругой задачи. Зачастую недостаточно использовать в качестве виртуальных дефектов дислокации и дисклинации Вольтерры, необходимо иметь и другие виртуальные дефекты различных конфигураций, например, круговую радиальную дислокацию Соммиери [11, 13, 16, 17]. Нам представляется, что удобными виртуальными дефектами для решения осесимметричных граничных задач являются круговые дилатационные и сдвиговые нити. Для получения решений более общих задач можно использовать лучи и бесконечно малые дислокационные петли [5].

Целью настоящей работы явилось развитие классификации дефектов упругой среды. На основе классификации был сделан расчет упругих полей некоторых прямолинейных и круговых дефектов, которые в дальнейшем предполагается использовать для моделирования осесимметричного включения и для решения граничных задач теории дефектов и теории упругости в целом.

## 2. Классификация внутренних источников упругих искажений в континууме

Упругие поля в теле могут быть вызваны либо внешними силами, приложенными к границам тела, либо внутренними источниками, присутствующими в теле. Внутренние источники вызывают искажения (дисторсию) упругой среды и тем самым генерируют упругие поля в ней. Внутренние источники - это дефекты среды. Уточним, что в качестве дефектов мы не рассматриваем неоднородности, т.е. области с другими упругими модулями, или пустоты. Неоднородности и пустоты самостоятельно не являются источниками упругих полей, а лишь влияют на их перераспределение.

Есть три, на наш взгляд, основных способа задания внутренних источников упругих полей: 1) с помощью распределения сил с моментом или без (см., например, [18]), 2) с помощью собственных дисторсий (см., например, [2-4, 10]) и 3) с помощью гармонических функций или полей смещений, являющихся решениями дифференциальных уравнений равновесия с соответствующими граничными условиями [9, 16, 17, 19]. Эти способы применяются для создания математических моделей реальных физических дефектов кристаллической решетки: точечных дефектов, включений, дислокаций. Основными уравнениями, которым должны удовлетворять упругие поля дефекта при всех способах его задания, являются уравнения равновесия.

Силовой подход позволяет с помощью распределения объемных сил рассчитывать упругие поля дефекта [9, 18]. Этот подход достаточно эффективно применять для расчета полей точечных центров расширения-сжатия, которые в реальной кристаллической решетке реализуются в виде вакансий или примесных атомов. В случае дислокаций силовой подход также возможен, хотя и не столь очевиден [20].

Прямыми и ясными способами моделирования дефекта являются подходы с использованием гармонических функций или смещений и с использованием собственной дисторсии. В настоящей работе мы обратимся к дисторсионному подходу.

В микромеханике сплошной упругой среды для однозначного задания любого дефекта вводится понятие тензора собственной дисторсии (или собственной деформации, являющейся симметризованной дисторсией), которая определяет способ задания дефекта и область, где этот способ реализуется. Собственная дисторсия – это полная и однозначная характеристика дефекта. Отклик упругой среды на заданную собственную дисторсию однозначно определяет упругие поля дефекта в среде. Аппарат для нахождения упругих полей дефекта по заданной собственной дисторсии хорошо разработан [2-4, 5, 10].

Процедура задания собственной дисторсии  $\beta_{ij}^*$  в упругом теле выглядит так:

1). выбирается площадка, возможно криволинейная и замкнутая; 2). вдоль площадки делается разрез; 3). верхний берег разреза пластически сдвигается относительно неподвижного нижнего берега, при этом возможно добавление или извлечение материала; 4). прикладываются силы для того, чтобы «приклеить» деформированный верхний берег к нижнему; 4). после склейки берегов разреза, силы снимаются. Это приводит к появлению дефекта с заданной дисторсией  $\beta_{ij}^*$ . Упругий отклик среды на дисторсию  $\beta_{ij}^*$  - это упругие поля дефекта.

Процесс задания собственной дисторсии можно представить и так, как это впервые предложил Эшелби для включений [2]. После того, как сделан разрез, материал вынимается, затем он пластически деформируется, т.е. трансформируется (отсюда собственную дисторсию иногда называют пластической или трансформационной), к этому деформированному объему материала прикладываются силы с тем, чтобы вставить его в прежнее место точно по месту выреза, затем поверхности разреза склеиваются и силы снимаются.

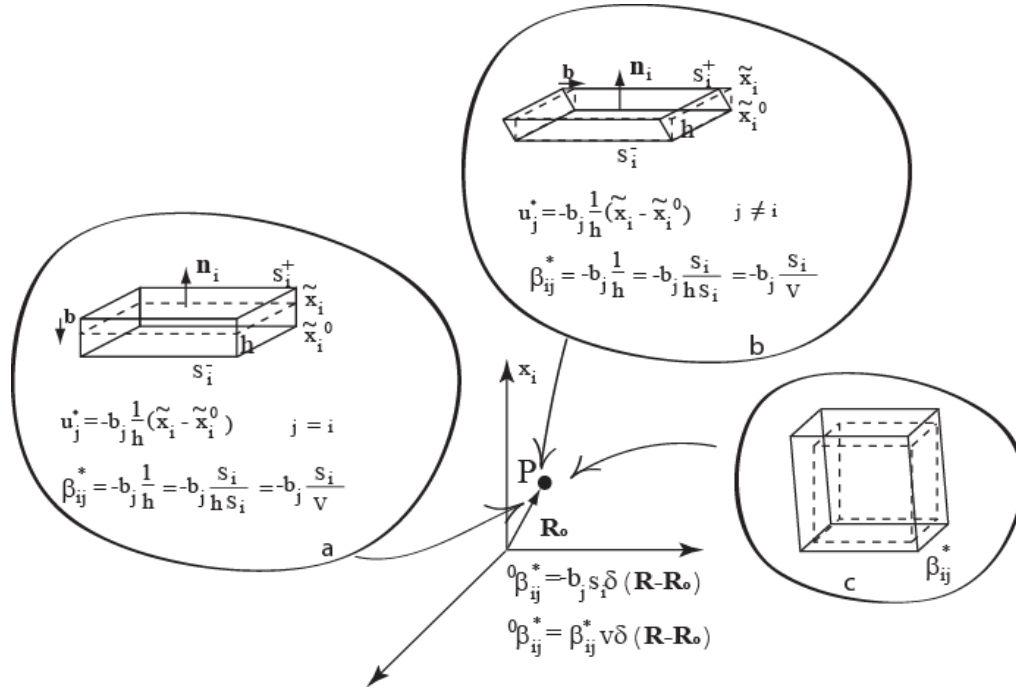
Если применить процедуру Эшелби к областям разной размерности, то можно получить классификацию дефектов в упругой среде, основанную на размерности  $n$  области  $\Omega_n$  задания собственной дисторсии  ${}^n\beta_{ij}^*$ . Очевидно, что в трехмерном пространстве дефекты подразделяются на 4 типа.

**Нульмерные или точечные дефекты ( $n = 0$ ).** Следуя Круппе [5], определим бесконечно малые дислокационные петли, которые являются элементарными нульмерными дефектами (Рис. 1a,b). Дисторсию бесконечно малой дислокационной петли запишем следующим образом:

$${}^0\beta_{ij}^* = -b_j s_i \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad i, j = x, y, z, \quad (1)$$

где  $b_j$  - вектор Бюргера дислокации, помещенной в точку  $\mathbf{R}_0$ ,  $s_i$  - площадь петли. Трехмерная дельта-функция Дирака  $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$  связана с одномерными дельта-функциями соотношением  $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$ . Она имеет следующую единицу измерения:  $[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)] = [\delta(x - x_0)][\delta(y - y_0)][\delta(z - z_0)] = X^{-1} \cdot X^{-1} \cdot X^{-1} = X^{-3}$ , где  $X$  - единица длины. Вообще говоря, дисторсия (1) может быть задана в любой ортогональной системе координат, например, цилиндрической или сферической ( $i, j = r, \varphi, z$  или  $i, j = R, \theta, \varphi$ ). Проиллюстрируем формулу (1). Возьмем диск малой толщины  $h$  и малой площадью основания  $s_i$ . Материал диска - это материал среды. Верхнее основание диска с координатой  $\tilde{x}_i$  пластически сдвинем относительно нижнего неподвижного основания с координатой  $\tilde{x}_i^0$  на вектор -  $-b_j$  (Рис. 1a,b). Тогда смещение вдоль толщины диска будет иметь вид  $u_j^* = -b_j \frac{1}{h} (\tilde{x}_i - \tilde{x}_i^0)$ , а пластическая дисторсия такого диска будет равна  $\beta_{ij}^* = -b_j \frac{1}{h}$ . Вставим пластически деформированный диск в точку  $\mathbf{R}_0$ , определив, таким образом, плотность дисторсии в точке. Эта плотность аналогична плотности точечного заряда  $q$  в электростатике  $\rho = q\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$ . Умножим плотность дисторсии на малый объем  $hs_i$ , получим собственную дисторсию (1) точечного дефекта P в среде в системе координат  $(x, y, z)$ , сосной системе координат  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ . Круппа определял бесконечно малую дислокационную петлю аналогично, только разрез делался по бесконечно малой

площадке  $ds_i$  в точке  $P$ , верхний берег разреза получал пластическое смещение  $u_j^* = -b_j \frac{1}{h} (x_i - x_i^0)$  относительно неподвижного нижнего берега с координатой  $x_i^0$ , и тогда дисторсия становилась равной:  $\beta_{ij}^* = \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} = -b_j \frac{1}{h}$ . При устремлении  $h \rightarrow 0$  на бесконечно малой площадке получалась дисторсия  ${}^0\beta_{ij}^* = \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} = -b_j \frac{ds_i}{h ds_i(\mathbf{R}_0)} = -b_j ds_i \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$ .



**Рис. 1.** Нульмерные дефекты в упругом пространстве: (а) бесконечно малая призматическая дислокационная петля; (б) бесконечно малая дислокационная петля скольжения; (с) дефект общего вида. Показано, какой собственной дисторсией  ${}^0\beta_{ij}^*$  обладает каждый дефект.

Выражение (1) можно формализовать:

$${}^0\beta_{ij}^* = \beta_{ij}^* v \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad i, j = x, y, z, \quad (2)$$

где  $\beta_{ij}^*$  - пластическая дисторсия малого объема  $v$  без учета места своего задания в среде (Рис. 1с).

Рассмотрим дефекты с малой площадкой разреза  $s_z$ . Берегам разреза этой площадки зададим произвольные смещения, записанные в виде комбинации произвольных сдвигов и поворотов [10, 21, 22]:

$${}^0\beta_{zj}^* = \{-b_j - e_{jpr} \omega_p (x_q - x_{q0})\} s_z \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (3)$$

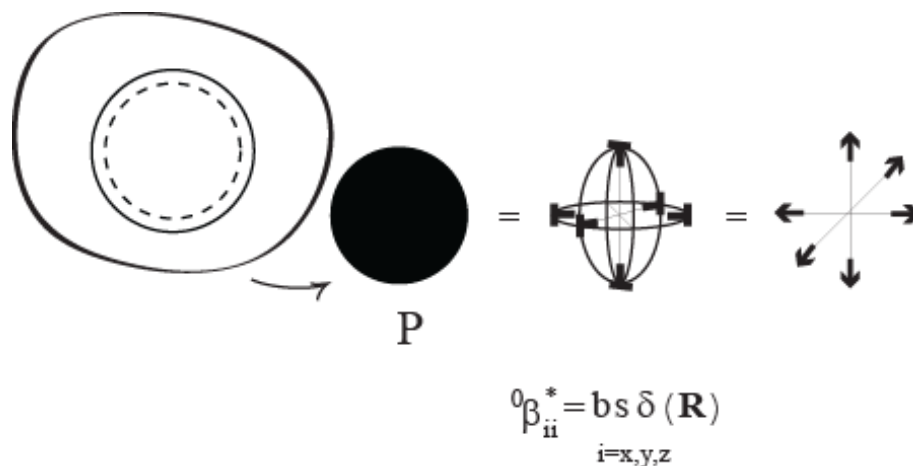
где в фигурных скобках стоит смещение верхнего берега площадки  $s_z^+$  при неподвижном нижнем берегу разреза  $s_z^-$ ,  $b_j$  - вектор Бюргерса дислокации;  $e_{jpr}$  - тензор

Леви-Чивита;  $\omega_p$  - вектор Франка дисклинации;  $x_{q_0}$  точка, через которую проходит ось ротации. Знаки перед вектором Бюргерса и вектором поворота Франка сложились исторически. На самом деле важен знак у дисторсии (3). Вектор Бюргерса по определению является вектором невязки контура Бюргерса, который ограничивает выбранную площадку. Знак согласует вектор Бюргерса с определением нормали поверхности разреза, скачком смещений на разрезе, и, в конечном итоге, со знаком собственной дисторсии. Согласно ф. (3) мы получаем бесконечно малые дислокационно-дисклинационные петли с дисторсиями, записанными так, как это сделано для конечноразмерных дислокационно-дисклинационных петель [10], но стянутых в точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . В частных случаях задания дисторсий (3) эти дефекты – бесконечно малые петлевые дислокации и дисклинации Вольтерра. Линией бесконечно малой петли является контур, ограничивающий площадку петли и стянутый в точку.

Особый интерес представляют две бесконечно-малые дислокационные петли, впервые рассчитанные Кроупой [5]. С помощью бесконечно малых дислокационных петель, как будет показано ниже, можно сконструировать точечный центр расширения-сжатия и известные дефекты бóльшей размерности: дислокации и дисклинации конечных размеров и включения. Если вектор  $\mathbf{b}$  направлен вдоль нормали к поверхности разреза, т.е.  $\mathbf{b} = \pm b_z \mathbf{e}_z$ , то бесконечно малая петля - призматическая (рис. 1а). Если вектор  $\mathbf{b}$  лежит в плоскости разреза, например,  $\mathbf{b} = \pm b_x \mathbf{e}_x$ , то бесконечно малая петля - петля скольжения (рис. 1б).

Для центра расширения-сжатия, другими словами, дилатационного центра, собственная дисторсия представима формулой:

$${}^0\beta_{ii}^* = -b_i s_i \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad i = x, y, z, \quad \dots(4)$$



**Рис. 2.** Дислокационная модель точечного равноосного дилатационного центра P. Показано, что три взаимно перпендикулярные бесконечно малые призматические петли и три пары взаимно перпендикулярных точечных сил создают дилатационный центр.

Дилатационный центр с равноосной дисторсией  ${}^0\beta_{xx}^* = {}^0\beta_{yy}^* = {}^0\beta_{zz}^*$  является простейшей упругой моделью примесного атома или вакансии, для которого можно записать [7] (Рис. 2):

$${}^0\beta_{xx}^* = {}^0\beta_{yy}^* = {}^0\beta_{zz}^* = bs \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = \frac{1}{3} \Delta V \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0). \quad (5)$$

Здесь  $\Delta V$  - изменение объема в точке локализации дефекта. Если  $l$  - начальный

линейный размер некоторого объема  $v = l^3$ , то изменение линейного размера на величину  $\Delta l$  приведет к изменению объема на величину  $\Delta v = (l + \Delta l)^3 - l^3 \approx 3l^2 \Delta l$ .

Полагая, что  $s = l^2$  и  $b = \Delta l$ , получаем  $bs = \frac{1}{3} \Delta v$  и последнее равенство в формуле (5).

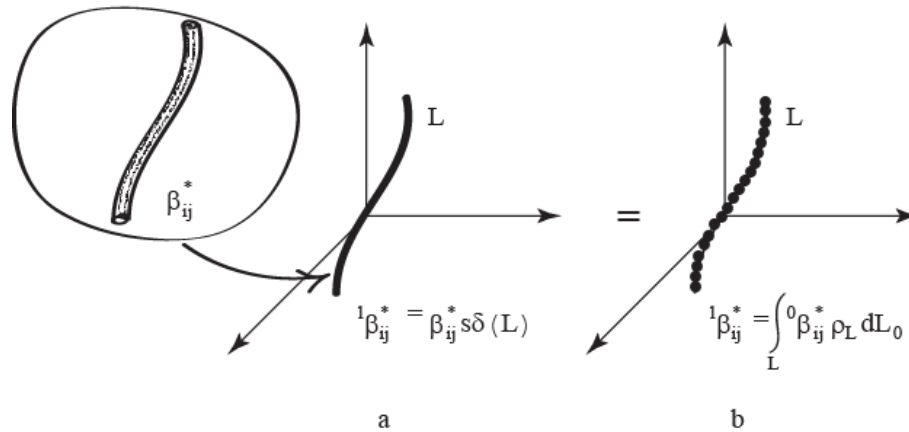
Таким образом, дилатационный центра – это три взаимно перпендикулярные бесконечно малые призматические петли (Рис. 2). Отметим, что три взаимно-перпендикулярные пары сил без момента также моделируют центр расширения-сжатия [18] (Рис. 2).

Увеличение размерности области задания дефекта  $\Omega_0 \rightarrow \Omega_1$  ( $\Omega_1 \equiv L$ ) приводит к одномерному дефекту.

**Одномерные дефекты** ( $n=1$ ). Дисторсию одномерного дефекта логично определить так: вырезаем трубочку малого сечения вдоль некоторой кривой будущего дефекта, пластически деформируем ее и вставляем назад в линию, склеив берега разреза (Рис. 3а). В результате собственная дисторсия одномерного дефекта примет вид:

$${}^1\beta_{ij}^* = \beta_{ij}^* s \delta(L), \quad (6)$$

где  $\beta_{ij}^*$  – пластическая деформация линии  $L$ ;  $s$  – множитель, имеющий размерность площади;  $\delta(L)$  – двумерная дельта-функция.



**Рис. 3.** Одномерный дефект (а) и его представление с помощью точечных дефектов (б).

Рассмотрим прямолинейный дефект, направленный вдоль оси  $Z$ . Пусть этот дефект обладает дисторсией  ${}^1\beta_{ii}^*$ , ( $i = x, y$ ). Это означает, что в линию  $L$  вставлен пластически деформированный стержень, у которого малое поперечное сечение  $s_z$  преобразовалось в  $s_z + \Delta s_z$ . Если для простоты допустить  $s_z = l^2$ , то  $\Delta s_z = (l + \Delta l)^2 - l^2 = 2l\Delta l$  и  $\beta_{xx}^* = \beta_{yy}^* = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \frac{\Delta s_z}{s_z}$ , тогда формула (6) примет вид:

$${}^1\beta_{xx}^* = {}^1\beta_{yy}^* = \frac{1}{2} \Delta s_z \delta(L). \quad (7)$$

Полагая, что дельта-функция на линии  $L$  – это векторная функция, в случае двурвноосной собственной дисторсии для одномерного дефекта можно записать:

$${}^1\beta_{ij}^* = \frac{1}{2} \Delta s_j \delta_j(L), \quad i \neq j \quad (8)$$

где дельта-функция на кривой  $\delta_j(L) = \int_L \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') dL'_j$  [6],  $\Delta s_j$  - изменение поперечной площадки на кривой  $\mathbf{L}$ . Для прямолинейного дефекта, направленного вдоль оси  $Z$   $\delta_j(L) = \delta_z(L) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) H(L)$ , где  $H(L) = \begin{cases} 1, & z \in L \\ 0, & z \notin L \end{cases}$  - функция Хевисайда.

Отметим, что ф. (7) и (8) являются дискуссионными.

Одномерный дефект можно определить и как непрерывно распределенные нульмерные дефекты вдоль некоторой линии с некоторой линейной плотностью  $\rho_L$  (Рис. 3b):

$${}^1\beta_{ij}^* = \int_L {}^0\beta_{ij}^* \rho_L dL_0 = \int_L \beta_{ij}^* \nu \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \rho_L(\mathbf{R}_0) dL_0, \quad i, j = x, y, z, \quad (9)$$

где  $L_0$  - координата точечного дефекта вдоль линии  $\mathbf{L}$ .

В том случае, если  $\beta_{ij}^*$  в ф. (9) не зависит от координаты распределяемых точечных дефектов, а линейная плотность постоянна, получаем простую формулу:

$${}^1\beta_{ij}^* = \beta_{ij}^* \nu \rho_L \delta(L). \quad (10)$$

Для прямолинейного дефекта с линией вдоль оси  $Z$   $\delta(L) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ ,  $[\delta(L)] = [\delta(x - x_0)][\delta(y - y_0)] = X^{-1} \cdot X^{-1} = X^{-2}$ . Очевидно, что положив  $\nu \rho_L = s$ , мы приходим к формуле (6). Из этого следует, что *интегрируя упругие поля нульмерного дефекта* вдоль линии с некоторой плотностью, мы можем получить *упругие поля одномерного дефекта*.

Достоинствами задания одномерного дефекта по ф. (9) является простота и явная связь с физическими прототипами. Например, линейное распределение дисторсий (2) – это цепочка вакансий или примесных атомов.

С дальнейшим увеличением размерности области задания дисторсии  $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  ( $\Omega_2 \equiv S$ ) мы переходим к двумерным дефектам и, в частности, к дислокациям Соммилианы и Вольтерры.

**Двумерные дефекты ( $n = 2$ ).** Областью задания собственной дисторсии двумерных дефектов является поверхность.

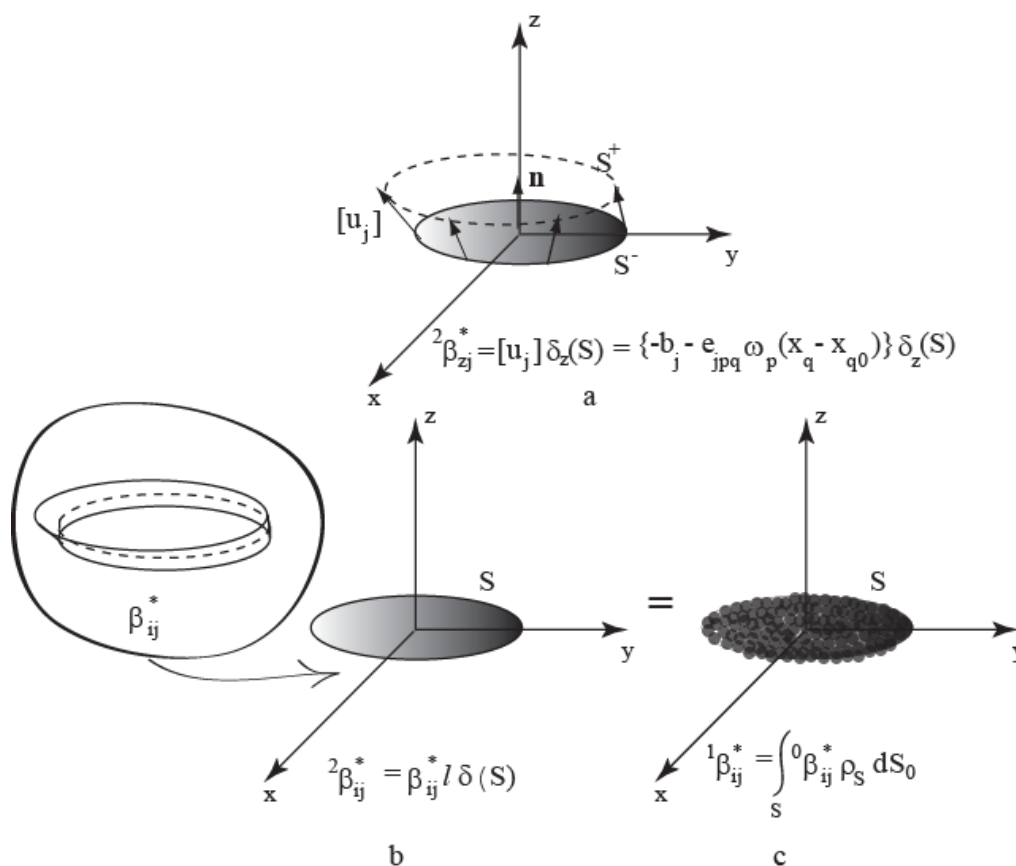
Двумерные дефекты – это дислокации Соммилианы и дислокации и дисклинации Вольтерра (Рис. 4а). Для этих дефектов область задания собственной дисторсии совпадает с плоскостью разреза, берегам которого задаются смещения. Дислокации и дисклинации Вольтерра не имеют особенностей упругих полей на поверхности разреза  $\Omega_2$ , поскольку скачок смещений для них – это чистый сдвиг или поворот, но имеют сингулярность на линии дефекта, ограничивающей поверхность разреза. Поэтому их традиционно называют *линейными дефектами*. Собственная дисторсия дислокаций Соммилианы имеет вид [21]:

$${}^2\beta_{ij}^* = [u_j] \delta_i(S) = \{-b_j - e_{jpr} \omega_p(x_q - x_{q0})\} \delta_i(S), \quad (11)$$

где  $[u_j]$  - задаваемый скачок смещений на поверхности разреза  $S$  с нормалью  $\mathbf{n}_i$ ,  $\delta_i(S)$  - дельта-функция на поверхности:  $\delta_i(S) = \int_S \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') dS'_i$ . Для плоской

поверхности  $S$  с нормалью  $\mathbf{n}_z$  и координатой  $z_0$  по оси  $OZ$  получаем

$$\delta(S) = \delta_z(S)\mathbf{e}_z = H(S)\delta(z - z_0)\mathbf{e}_z, \text{ где } H(S) = \begin{cases} 1, & x, y \in S \\ 0, & x, y \notin S \end{cases} - \text{ функция Хевисайда.}$$



**Рис. 4.** Двумерный дефект: (а) дислокация Сомилианы (в частном случае, дислокация Вольтерра), (б) двумерный дефект общего вида, (с) двумерный дефект, составленный из точечных дефектов.

По аналогии с ф. (2) и (6) для двумерного дефекта общего вида справедливо выражение:

$${}^2\beta_{ij}^* = \beta_{ij}^* l \delta(S), \quad (12)$$

где  $l$  - множитель, имеющий размерность длины.

Мы можем получить двумерный дефект, распределяя точечные дефекты по поверхности  $S$ :

$${}^2\beta_{ij}^* = \int_S {}^0\beta_{ij}^* \rho_s dS_0 = \int_S \beta_{ij}^*(\mathbf{R}_0) \nu \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \rho_s(\mathbf{R}_0) dS_0, \quad (13)$$

где  $\rho_s$  - поверхностная плотность дисторсий  ${}^0\beta_{ij}^*$ ,  $S$  - поверхность, где дисторсии распределены. В общем случае поверхность  $S$  не связана с площадками  $s_i$ , на которых заданы компоненты дисторсии  ${}^0\beta_{ij}^*$ , но может совпадать с ними. При постоянстве  $\beta_{ij}^*(\mathbf{R}_0)$  и  $\rho_s(\mathbf{R}_0)$  и с учетом того, что  $\rho_s \nu = l$ , получаем ф. (12). Продемонстрируем, каким образом с помощью распределенных бесконечно малых призматических петель с

дисторсиями  ${}^0\beta_{zz}^* = b_z s_z \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$  получается дислокационная призматическая петля, находящаяся в плоскости с нормалью  $\mathbf{n}_z$  и занимающая площадь  $S$ :

$${}^2\beta_{ij}^* = \int_S {}^0\beta_{ij}^* \rho_s dS_0 = \int_S b_z s_z \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \rho_s dS_0 = \int_S b_z s_z \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \rho_s dx_0 dy_0 =$$

$$= b_z H(S) \delta(z - z_0) = b_z \delta_z(S). \text{ Здесь полагаем, что } \rho_s = 1/s_z.$$

Менее гибкий способ задания поверхностных дефектов – это распределять линейные дефекты вдоль некоторого направления.

Последний переход области задания дефекта  $\Omega_0 \rightarrow \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$  приводит к объемным дефектам.

### Объемные дефекты или включения ( $n = 3$ ).

Для включений собственная дисторсия может быть записана с помощью объемной дельта-функции  $\delta(\Omega_3) = \delta(V) = \begin{cases} 1, & \mathbf{R} \in V \\ 0, & \mathbf{R} \notin V \end{cases}$  [7] аналогично тому, как это было сделано в предыдущих случаях (Рис. 1а):

$${}^3\beta_{ij}^* = \beta_{ij}^* \delta(V), \quad i, j = x, y, z. \quad (14)$$

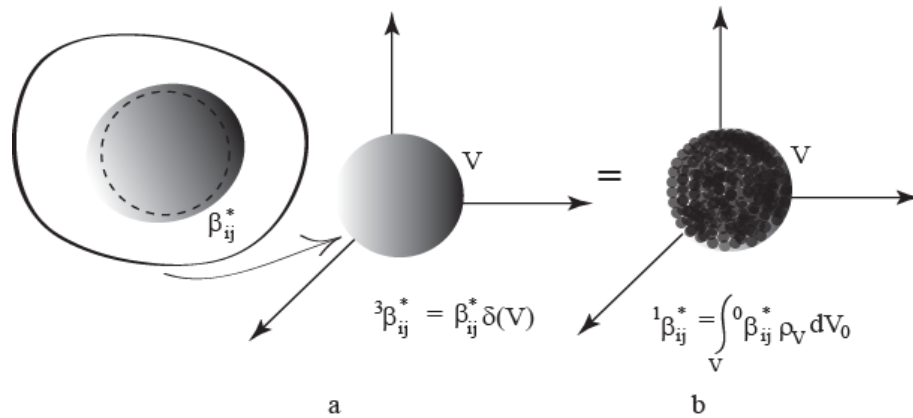


Рис. 5. Включение общего вида (а) и составленное из точечных дефектов (б).

Компоненты  $\beta_{ij}^*$  имеют значение относительного удлинения в направлении  $j$  элементарной площадки с нормалью  $\mathbf{n}_j$  (при  $i = j$ ) или сдвига в направлении  $j$  элементарной площадки с нормалью  $\mathbf{n}_i$  (при  $i \neq j$ ). В реальном кристалле это означает, что, например, в результате фазового перехода в области  $\Omega_3$  кристаллическая решетка изменила свои постоянные  $a_1, a_2, a_3$  и, возможно, испытала сдвиг. Температурное воздействие также может приводить к локализованному изменению кристаллической решетки. Можно представить себе направленную диффузию вакансий, приведших к дефициту материала в области  $\Omega_3$ . Отметим, что компоненты собственной дисторсии необязательно должны быть постоянными. Классическим примером включения не чисто дилатационного типа является частица с собственной деформацией Маркса - Иоффе [23], внедренная в матрицу. В свободном состоянии она является моделью икосаэдрической пентагональной частицы. В этой модели икосаэдр заменяется сфероидом, в котором непрерывно и равномерно распределены конусы с бесконечно малыми телесными углами. Созданный таким образом дефект обладает собственными деформациями  $\varepsilon_{\theta\theta}^* = \varepsilon_{\varphi\varphi}^*$  в сферической системе координат  $(R, \theta, \varphi)$ , связанной с

центром частицы. Интересно, что такая частица обладает ненулевыми упругими полями и энергией в отличие от свободной частицы с чистой дилатацией.

Включение можно составить из дефектов меньшей размерности. Очевидно, например, что равномерно распределенные в объеме точечные дефекты с равными собственными дисторсиями образуют включение (14), Рис. 5 б:

$${}^3\beta_{ij}^* = \int_V {}^0\beta_{ij}^* \rho_V dV_0 = \int_V \beta_{ij}^*(\mathbf{R}_0) \nu \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \rho_V dV_0 = \beta_{ij}^*(\mathbf{R}_0) \delta(V), \text{ где } \rho_V = 1/V.$$

Не трудно заметить, что в 3D-континууме дефекты меньшей размерности, чем 3, обладают дисторсиями с некоторыми произвольными размерными множителями. У точечного дефекта – это  $\nu$ , у линии –  $s$  и у плоского дефекта –  $l$ . Для определенности, можно рассматривать такой множитель, как размер дефекта до пластической деформации. Итак,  $\nu$  – объем точки,  $s$  – площадь поперечного сечения линии и  $l$  – толщина плоского дефекта.

### 3. Упругие поля дефектов

На основании собственной дисторсии  $\beta_{ij}^*$  (или собственной деформации  $\varepsilon_{ij}^*$ ), функции Грина  $G_{mk}$  упругой среды и ее упругих модулей  $C_{jlmn}$  однозначно определяется поле полных смещений дефекта, а также его упругие деформации и напряжения (см., [7, 10]. Например, полные смещения дефекта определяются из соотношения [7]:

$$u_i'(\mathbf{R}) = - \int_V C_{jlmn} \varepsilon_{mn}^*(\mathbf{R}') G_{ij,l}(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) dV', \quad (15)$$

где производная  $G_{ij,l}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$  берется по нештрихованной переменной,  $V$  – объем тела, а

по повторяющимся индексам ведется суммирование. Заметим также, что  $\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l} = -\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l'}$ ,

поэтому формулу (15) можно записывать и со знаком + перед интегралом, имея в виду дифференцирование по штрихованной координате. В силу соотношений

$\varepsilon_{mn}^* = \varepsilon_{nm}^* = \frac{1}{2}(\beta_{mn}^* + \beta_{nm}^*) = \beta_{(nm)}^*$  и  $C_{jlmn} = C_{jlnm}$  в ф. (15) позволительно вписать дисторсию вместо деформации:  $\varepsilon_{mn}^*(\mathbf{R}') \rightarrow \beta_{mn}^*(\mathbf{R}')$ .

Для изотропной трехмерной упругой среды функция Грина и выражение  $C_{jlmn} G_{ij,l}(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|)$  имеют вид [10]:

$$G_{ij}(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^2} \right\}, \quad (16 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} C_{jlmn} G_{ij,l}(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) &= \\ &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \frac{\delta_{mi}(x_n - x_n') + \delta_{ni}(x_m - x_m') - \delta_{mn}(x_i - x_i')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^3} + 3 \frac{(x_n - x_n')(x_m - x_m')(x_i - x_i')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^5} \right\}. \end{aligned} \quad (16 \text{ b})$$

Здесь  $|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ ;  $x_n, x_m, x_i$  суть  $x, y$ , или  $z$ ;  $\delta_{km}$  – символ Кронекера;  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Отметим, что в ф. (16 б) производная  $G_{ij,l}(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|)$  взята без учета вклада точки сингулярности  $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ . В дальнейшем необходимо проанализировать обобщенные производные функции Грина [24].

Формула (15) может измениться, если, например, среда, в которой задается дефект, двумерная или нелинейная и т. п., поскольку она выведена на основании уравнений равновесия, линейного закона Гука и подразумевает трехмерность среды. Если упругая среда анизотропная, тогда функция Грина и выражение  $C_{jlmn} G_{ij,l}(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|)$  не описывается ф. (16), а формула (15) вполне «работает». В любом случае собственная дисторсия дефекта позволяет на основании соответствующей функции Грина, закона связи между напряжениями и деформациями и упругих модулей полностью рассчитать упругие поля дефекта.

Формулы (15) и (16) удобны для вычисления смещений точечных дефектов. Для дефектов большей размерности выражения для смещений, деформаций и напряжений можно упростить, применяя к ним прямое и обратное преобразование Фурье. В результате, универсальная рабочая формула, связывающая собственную дисторсию дефекта, например, с полем смещений, примет вид [21]:

$$u_i^t(\mathbf{R}) = -i \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \xi_l C_{jlmn} \hat{G}_{ij} \hat{\beta}_{mn}^* \exp(i \xi \cdot \mathbf{R}) d\xi_x d\xi_y d\xi_z, \quad (17)$$

где  $\hat{G}_{ij}$  and  $\hat{\beta}_{ij}^*$  - фурье-образы функции Грина упругой среды и собственной дисторсии дефекта соответственно,  $\xi \cdot \mathbf{R} = \xi_x x + \xi_y y + \xi_z z$ . Для изотропной среды составляющие выражения (13) известны [21]:

$$C_{jlmn} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{jl} \delta_{mn} + G(\delta_{lm} \delta_{jn} + \delta_{ln} \delta_{jm}), \quad (18 a)$$

$$\hat{G}_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2(1-\nu)\xi^2 \delta_{ij} - \xi_i \xi_j}{2(1-\nu)G\xi^4}, \quad (18 b)$$

где  $\xi^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$ ,  $G$  - модуль сдвига.

Таким образом, рецепт, с помощью которого определяются упругие поля произвольного дефекта, прост: надо знать его собственную дисторсию (деформацию) и уметь применять к ней известные формулы, например, ф. (15) или ф. (17).

Иногда проще действовать по-другому: зная поля одного дефекта, например, точечного, интегрированием определять поля источника большей размерности. Именно так, на основании поля точечного дилатационного центра, рассчитанного с помощью ф. (15), мы найдем поля других дилатационных источников - отрезка, прямолинейной нити, круговой нити и кругового диска.

Для начала определим поля бесконечно малой дислокационной призматической петли и сравним его с полями, представленными Кроупой [5].

**3.1. Бесконечно малая дислокационная призматическая петля.** Рассмотрим бесконечно-малую призматическую петлю (*Infinitesimal Prismatic Dislocation Loop - IPDL*), расположенную в начале координат и имеющую дисторсию:

$${}^0\beta_{zz}^{*IPDL} = bs\delta(\mathbf{R}). \quad (19)$$

Поле полных смещений  $u_i^t(\mathbf{R})$  такой петли, рассчитанное по формулам (15), (16) и (19) имеет вид:

$$u_x^{IPDL} = \frac{bs x}{8\pi(1-\nu)|\mathbf{R}|^3} \left\{ -(1-2\nu) + 3 \frac{z^2}{|\mathbf{R}|^2} \right\}, \quad (20 a)$$

$$u_y^{IPDL} = \frac{bs y}{8\pi(1-\nu) |\mathbf{R}|^3} \left\{ -(1-2\nu) + 3 \frac{z^2}{|\mathbf{R}|^2} \right\}, \quad (20 \text{ b})$$

$$u_z^{IPDL} = \frac{bs z}{8\pi(1-\nu) |\mathbf{R}|^3} \left\{ (1-2\nu) + 3 \frac{z^2}{|\mathbf{R}|^2} \right\}, \quad (20 \text{ c})$$

где  $|\mathbf{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Смещения позволяют рассчитать поле упругих деформаций  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ ,

где  $u_j$  - упругие смещения, и затем, по закону Гука, находятся напряжения

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta \delta_{ij} \right), \quad \Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad (i, j = x, y, z):$$

$$\sigma_{xx}^{IPDL} = \frac{3Gbs}{4\pi(1-\nu) |\mathbf{R}|^3} \left\{ \frac{4\nu-1}{3} + (1-2\nu) \frac{x^2+z^2}{|\mathbf{R}|^2} - 5 \frac{x^2 z^2}{|\mathbf{R}|^4} \right\}, \quad (21 \text{ a})$$

$$\sigma_{yy}^{IPDL} = \frac{3Gbs}{4\pi(1-\nu) |\mathbf{R}|^3} \left\{ \frac{4\nu-1}{3} + (1-2\nu) \frac{y^2+z^2}{|\mathbf{R}|^2} - 5 \frac{y^2 z^2}{|\mathbf{R}|^4} \right\}, \quad (21 \text{ b})$$

$$\sigma_{zz}^{IPDL} = \frac{3Gbs}{4\pi(1-\nu) |\mathbf{R}|^3} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \frac{z^2}{|\mathbf{R}|^2} - 5 \frac{z^4}{|\mathbf{R}|^4} \right\}, \quad (21 \text{ c})$$

$$\sigma_{xy}^{IPDL} = \frac{3Gbs xy}{4\pi(1-\nu) |\mathbf{R}|^5} \left\{ 1 - 2\nu - 5 \frac{z^2}{|\mathbf{R}|^2} \right\}, \quad (21 \text{ d})$$

$$\sigma_{xz}^{IPDL} = \frac{3Gbs xz}{4\pi(1-\nu) |\mathbf{R}|^5} \left\{ 1 - 5 \frac{z^2}{|\mathbf{R}|^2} \right\}, \quad (21 \text{ e})$$

$$\sigma_{yz}^{IPDL} = \frac{3Gbs yz}{4\pi(1-\nu) |\mathbf{R}|^5} \left\{ 1 - 5 \frac{z^2}{|\mathbf{R}|^2} \right\}. \quad (21 \text{ f})$$

Рассчитанные поля (20)-(21) совпадают с полями, данными в статье [5]. Заметим, что для получения упругих деформаций мы дифференцировали полные смещения (20), игнорируя точку сингулярности (0,0,0). Используя понятие обобщенной функции и способ определения ее производной, можно получить производную и в точке сингулярности в виде трехмерной дельта-функции [24]. В дальнейшем анализ этой сингулярности будет проведен.

**3.2. Точечный центр дилатации ( $\Delta P$ ).** Определим поле точечного центра дилатации (5), находящегося в начале координат:

$$u_x^{\Delta P} = \frac{(1+\nu)bs}{4\pi(1-\nu)} \cdot \frac{x}{|\mathbf{R}|^3}, \quad u_y^{\Delta P} = \frac{(1+\nu)bs}{4\pi(1-\nu)} \cdot \frac{y}{|\mathbf{R}|^3}, \quad u_z^{\Delta P} = \frac{(1+\nu)bs}{4\pi(1-\nu)} \cdot \frac{z}{|\mathbf{R}|^3}; \quad (22 \text{ a,b,c})$$

$$\sigma_{xx}^{\Delta P} = \frac{G(1+\nu)bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{(-2x^2 + y^2 + z^2)}{|\mathbf{R}|^5}, \quad \sigma_{yy}^{\Delta P} = \frac{G(1+\nu)bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{(x^2 - 2y^2 + z^2)}{|\mathbf{R}|^5}, \quad (23 \text{ a,b})$$

$$\sigma_{zz}^{\Delta P} = \frac{G(1+\nu)bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{(x^2 + y^2 - 2z^2)}{|\mathbf{R}|^5}, \quad (23 \text{ c})$$

$$\sigma_{xy}^{\Delta P} = -\frac{3G(1+\nu)bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{xy}{|\mathbf{R}|^5}, \quad \sigma_{xz}^{\Delta P} = -\frac{3G(1+\nu)bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{xz}{|\mathbf{R}|^5} \quad (23 \text{ d,e})$$

$$\sigma_{yz}^{\Delta P} = -\frac{3G(1+\nu)bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{yz}{|\mathbf{R}|^5}, \quad \sigma_{xx}^{\Delta P} + \sigma_{yy}^{\Delta P} + \sigma_{zz}^{\Delta P} = 0. \quad (23 \text{ f,g})$$

Здесь мы использовали формулы (15), (16). Сложив поля трех взаимно перпендикулярных призматических петель (20)-(21), мы также получим поля точечного дилатационного источника (22)-(23).

**3.3. Дилатационный отрезок ( $\Delta L$ ), дилатационный луч ( $\Delta Li$ ) и дилатационная прямолинейная нить ( $\Delta Line$ ).** Интегрируя поля дилатационного центра вдоль прямой в заданных пределах, мы получаем поля дилатационного отрезка. Например, поле напряжений отрезка, расположенного вдоль оси  $OZ$ , примет вид:

$$\sigma_{ij}^{\Delta L} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{ij}^{\Delta P}(x, y, z - z_0) \rho_z dz_0, \quad (24)$$

где  $\rho_z$  - линейная плотность распределения точечных дефектов. Компоненты  $\sigma_{ij}^{\Delta L}$  (24) имеют аналитическое представление через элементарные функции, однако, они слишком громоздки, для того, чтобы их приводить в статье.

От поля отрезка предельным переходом при  $z_2 \rightarrow \infty$  в ф. (24) находим поле дилатационного луча, выходящего из начала координат ( $z_1 = 0$ ). Поле напряжений луча имеет вид:

$$\sigma_{xx}^{\Delta Li} = -\frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{2\pi(1-\nu)} \left( \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{z(2x^4 + x^2(y^2 + z^2) - y^2(y^2 + z^2))}{|\mathbf{R}|^3 (x^2 + y^2)^2} \right), \quad (25 \text{ a})$$

$$\sigma_{yy}^{\Delta Li} = -\frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{2\pi(1-\nu)} \left( \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{z(2y^4 + y^2(x^2 + z^2) - x^2(x^2 + z^2))}{|\mathbf{R}|^3 (x^2 + y^2)^2} \right), \quad (25 \text{ b})$$

$$\sigma_{zz}^{\Delta Li} = \frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{2\pi(1-\nu)} \frac{z}{|\mathbf{R}|^3}, \quad (25 \text{ c})$$

$$\sigma_{xy}^{\Delta Li} = -\frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{2\pi(1-\nu)} \left( \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{xyz(3x^2 + 3y^2 + 2z^2)}{(x^2 + y^2)^2 |\mathbf{R}|^3} \right), \quad (25 \text{ d})$$

$$\sigma_{xz}^{\Delta Li} = \frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{2\pi(1-\nu)} \frac{x}{|\mathbf{R}|^3}, \quad \sigma_{yz}^{\Delta Li} = \frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{2\pi(1-\nu)} \frac{y}{|\mathbf{R}|^3} \quad (25 \text{ e,f})$$

Аналогично предыдущему, от полей отрезка предельным переходом при  $z_1 \rightarrow -\infty$   $z_2 \rightarrow \infty$  в ф. (24) определяем поля бесконечной дилатационной прямой, направленной вдоль оси  $OZ$ :

$$\sigma_{xx}^{\Delta Line} = -\frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{\pi(1-\nu)} \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{yy}^{\Delta Line} = -\frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{\pi(1-\nu)} \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{zz}^{\Delta Line} = 0, \quad (26 \text{ a,b,c})$$

$$\sigma_{xy}^{\Delta Line} = -\frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{\pi(1-\nu)} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_{xz}^{\Delta Line} = \sigma_{yz}^{\Delta Line} = 0. \quad (26 \text{ d,e,f})$$

Запишем поле напряжений (26) в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$

$$\sigma_{rr}^{\Delta Line} = -\sigma_{\varphi\varphi}^{\Delta Line} = -\frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (27 \text{ a,b})$$

$$\sigma_{zz}^{\Delta Line} = \sigma_{r\varphi}^{\Delta Line} = \sigma_{rz}^{\Delta Line} = \sigma_{z\varphi}^{\Delta Line} = 0. \quad (27 \text{ c-f})$$

Введем радиус обрезания сингулярности функций (27a,b)  $\xi$  и перепишем коэффициент при  $\frac{1}{r^2}$  с учетом  $bs = \frac{1}{3}\Delta V$  следующим образом:

$$-\frac{G(1+\nu)\rho_z bs}{\pi(1-\nu)} = -\frac{G(1+\nu)\rho_z \Delta V}{3\pi(1-\nu)} = -\frac{G(1+\nu)\rho_z \Delta V \xi^2}{3(1-\nu)\pi \xi^2} = -\frac{G(1+\nu)\Delta V \xi^2}{3(1-\nu)V}.$$

В результате мы получили цилиндрическое включение с малым ядром-кernом, которое моделирует реальное включение цилиндрической формы в том случае, когда размером включения можно пренебречь по сравнению с другими пространственными параметрами задачи. Такая модель принята, например, при рассмотрении упругого поведения вихревой нити Абрикосова в сверхпроводниках II рода [25]. Вихревая нить – это цилиндрическая область нормальной фазы проводника, окруженная сверхпроводящей (СП) фазой. Фазовый переход из СП фазы в нормальную сопровождается в этом случае  $\Delta V$ -эффектом [25].

**3.4. Круговая дилатационная нить (CAL).** Дисторсия дилатационного центра в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  имеет вид:

$$\beta_{rr}^* = \beta_{\varphi\varphi}^* = \beta_{zz}^* = b s \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z) = b s \frac{1}{r_0} \delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z), \quad (28)$$

где  $(x_0, y_0, 0)$  и  $(r_0, \varphi_0, 0)$  координаты точечного дефекта в декартовой и цилиндрической системах координат соответственно.

Распределим точечные центры дилатации по окружности радиуса  $r_0$ . Пусть это распределение непрерывно и имеет линейную плотность  $\rho_\varphi = \text{const}$ . Получаем круговую дилатационную нить. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  собственная дисторсия круговой дилатационной нити запишется в виде:

$$\beta_{rr}^{*CAL} = \beta_{\varphi\varphi}^{*CAL} = \beta_{zz}^{*CAL} = \int_0^{2\pi} b s \frac{1}{r_0} \delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z) \rho_\varphi r_0 d\varphi_0 = b s \rho_\varphi \delta(r-r_0)\delta(z). \quad (29)$$

Поле смещений такой нити рассчитывается интегрированием поля смещений центра дилатации (18) с координатами  $(r_0, \varphi_0, 0)$  по окружности, элементом которой является  $dl = r_0 d\varphi_0$ , в пределах  $\varphi_0$  от 0 до  $2\pi$  с весом  $\rho_\varphi$ :

$$u_i^{CAL} = \int_0^{2\pi} u_i^{\Delta P} \rho_\varphi r_0 d\varphi_0, \quad i = r, \varphi, z, \quad (30)$$

$$u_r^{CAL} = \frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{r_0 k}{8r^{5/2}(-r_0)^{3/2}(1-k^2)} \left[ k^2(r^2 - r_0^2 - z^2)\mathbf{E}(k) + 4(-rr_0)(1-k^2)\mathbf{K}(k) \right], \quad (31 \text{ a})$$

$$u_{\varphi}^{\text{CAL}} = 0, \quad (31 \text{ b})$$

$$u_z^{\text{CAL}} = \frac{(1+\nu)\rho_{\varphi}bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{r_0 z k^3}{4(1-k^2)(-rr_0)^{3/2}} \mathbf{E}(k), \quad (31 \text{ c})$$

где  $\mathbf{K}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$  - полный эллиптический интеграл 1-го рода,

$\mathbf{E}(k) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt$  - полный эллиптический интеграл 2-го рода [26] и

$$k = \frac{2\sqrt{-r r_0}}{\sqrt{z^2 + (r - r_0)^2}}.$$

Выражения для поля смещений (31) можно переписать с помощью интегралов Лифшица-Ханкеля  $J(m, n; p) = \int_0^{\infty} J_m(\kappa) J_n\left(\frac{r}{r_0} \kappa\right) e^{-|z|\kappa} \kappa^p d\kappa$ , где  $J_n(\lambda)$  - функции Бесселя (см., например, [27]):

$$u_r^{\text{CAL}} \Big|_{z \neq 0} = \frac{(1+\nu)\rho_{\varphi}bsr_0}{2(1-\nu)} \cdot \int_0^{\infty} J_0(r_0\kappa) J_1(r\kappa) e^{-|z|\kappa} \kappa d\kappa = \frac{(1+\nu)\rho_{\varphi}bs}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r_0} J(0, 1; 1),$$

$$u_r^{\text{CAL}} \Big|_{z=0} = \frac{(1+\nu)\rho_{\varphi}bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{r_0}{r(r+r_0)|r-r_0|} \left( (r-r_0) \mathbf{E}\left(\frac{-4rr_0}{(r-r_0)^2}\right) + (r+r_0) \mathbf{K}\left(\frac{-4rr_0}{(r-r_0)^2}\right) \right), \quad (32 \text{ a})$$

$$u_{\varphi}^{\text{CAL}} = 0, \quad (32 \text{ b})$$

$$u_z^{\text{CAL}} = \frac{(1+\nu)\rho_{\varphi}bsr_0}{2(1-\nu)} \cdot \text{sgn}(z) \int_0^{\infty} J_0(r_0\kappa) J_0(r\kappa) e^{-|z|\kappa} \kappa d\kappa = \frac{(1+\nu)\rho_{\varphi}bs}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\text{sgn}(z)}{r_0} J(0, 0; 1), \quad (32 \text{ c})$$

где  $\text{sgn}(z) = \{1, z > 0; 0, z = 0; -1, z < 0\}$ . В формулах (32 а,с) использованы как ненормированные интегралы Лифшица-Ханкеля  $\int_0^{\infty} J_m(r_0\kappa) J_n(r\kappa) e^{-|z|\kappa} \kappa^p d\kappa$ , так и нормированные интегралы Лифшица-Ханкеля. Для расчета полей кругового дилатационного диска, получающихся интегрированием полей круговой дилатационной нити по радиусу  $r_0$ , удобнее использовать ненормированные интегралы Лифшица-Ханкеля.

Компонента смещений  $u_r^{\text{CAL}}$  (32 а) в плоскости залегания круговой нити  $z = 0$  не имеет выражения через интеграл  $J(0, 1; 1)$  [27]. На линии дефекта  $r = r_0$ ,  $z = \zeta$ ,  $\zeta \rightarrow 0$ , интегралы Лифшица-Ханкеля имеют особенности [28]:  $J(0, 1; 1) \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \ln \zeta$ ,  $J(0, 0; 1) \rightarrow \frac{1}{\pi \zeta}$ .

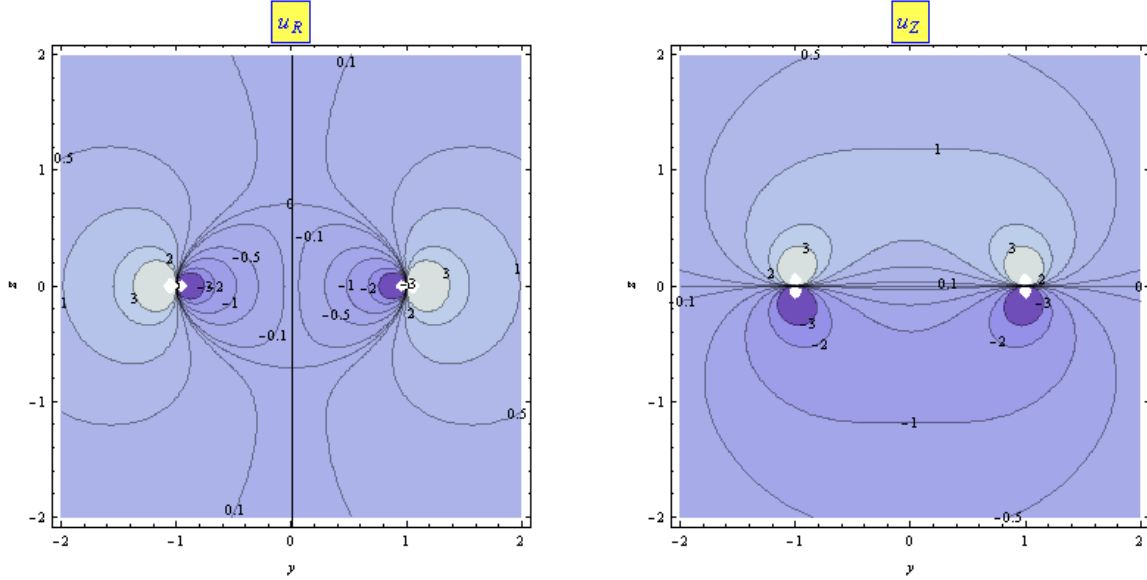
На рисунке 6 показано поле смещений круговой дилатационной нити.

Поле полных смещений (32) позволяет рассчитать поле упругих деформаций  $\varepsilon_{ij}$  в цилиндрической системе координат по формулам [18]:  $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u_{\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{u_r}{r}$ ,  $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ ,

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right), \quad i, j = r, \varphi, z.$$

Возникающие при дифференцировании дельта-функции игнорируются. По закону Гука определяются напряжения  $\sigma_{ij}$ :  $\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Delta\delta_{ij})$ ,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ ,  $i, j = r, \varphi, z$ ,

где  $\Delta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$ .



**Рис. 6.** Смещения круговой дилатационной нити, расположенной в плоскости  $XOY$ .

Смещения даны в плоскости  $x = 0$  и выражены в единицах  $\frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2\pi(1-\nu)r_0}$ . Координаты нормированы на радиус нити  $r_0$ . Здесь  $\rho_\varphi$  - плотность центров дилатации, образующих нить;  $b$  и  $s$  - величины малого вектора Бюргерса и площади бесконечно малых призматических петель, образующих центр дилатации, соответственно;  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Окончательно, компоненты упругих деформаций и механических напряжений круговой дилатационной нити везде кроме ее ядра приобретают вид:

$$\varepsilon_{rr}^{CAL} \Big|_{z=0} = \frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r_0^2} \left[ J(0,0;2) - \frac{r_0}{r} J(0,1;1) \right],$$

$$\varepsilon_{rr}^{CAL} \Big|_{z=0} = \frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{r_0}{r^2(r+r_0)^2|r-r_0|} \left( (-3r^2+r_0^2)\mathbf{E}\left(\frac{-4rr_0}{(r-r_0)^2}\right) - (r+r_0)^2\mathbf{K}\left(\frac{-4rr_0}{(r-r_0)^2}\right) \right), \quad (33 \text{ a})$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{CAL} \Big|_{z=0} = \frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{rr_0} J(0,1;1),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{CAL} \Big|_{z=0} = \frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{r_0}{r^2(r+r_0)|r-r_0|} \left( (r-r_0)\mathbf{E}\left(\frac{-4rr_0}{(r-r_0)^2}\right) + (r+r_0)\mathbf{K}\left(\frac{-4rr_0}{(r-r_0)^2}\right) \right), \quad (33 \text{ b})$$

$$\varepsilon_{zz}^{CAL} \Big|_{z=0} = \frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r_0^2} J(0,0;2), \quad \varepsilon_{zz}^{CAL} \Big|_{z=0} = \frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{2r_0}{(r+r_0)^2|r-r_0|} \mathbf{E}\left(\frac{-4rr_0}{(r-r_0)^2}\right), \quad (33 \text{ c})$$

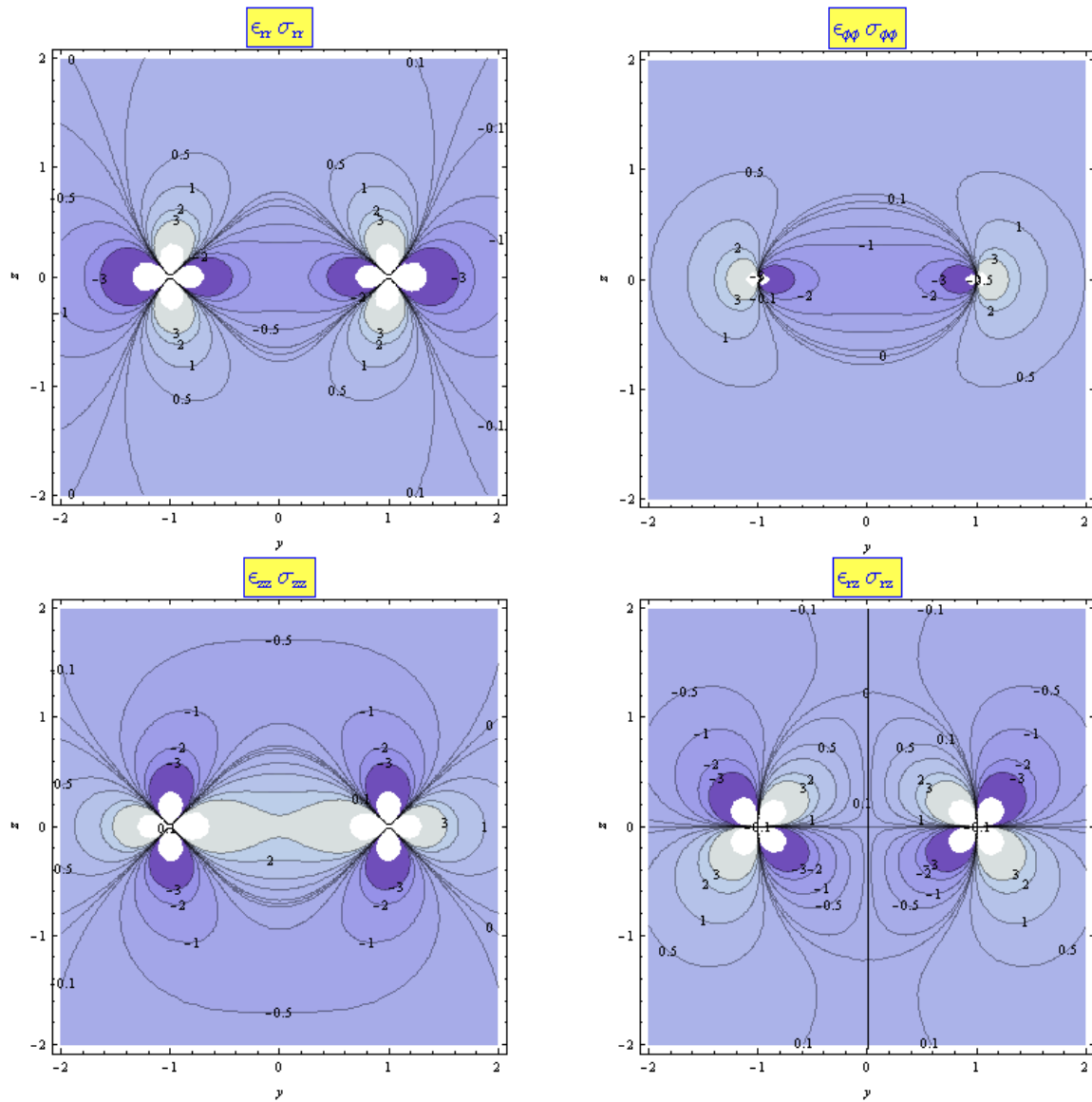
$$\varepsilon_{rz}^{\text{CAL}} = -\frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2(1-\nu)r_0^2} \cdot \text{sgn}(z) J(0,1;2), \quad (33 \text{ d})$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^{\text{CAL}} = \varepsilon_{\varphi z}^{\text{CAL}} = 0, \quad \Delta^{\text{CAL}} = \varepsilon_{rr}^{\text{CAL}} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\text{CAL}} + \varepsilon_{zz}^{\text{CAL}} = 0, \quad (33 \text{ e,f,g})$$

$$\sigma_{ij}^{\text{CAL}} = 2G\varepsilon_{ij}^{\text{CAL}} \quad (i, j = r, \varphi, z). \quad (34)$$

На линии дефекта  $r = r_0$ ,  $z = \zeta$ ,  $\zeta \rightarrow 0$ , интегралы Лифшица-Ханкеля, встречающиеся в компонентах деформаций, имеют следующие особенности [28]:  $J(0,0;2) \rightarrow -\frac{1}{\pi\zeta^2}$ ,  $J(0,1;1) \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \ln \zeta$ ,  $J(0,1;2) \rightarrow \frac{1}{2\pi\zeta}$ .

Упругие поля, генерируемые круговой дилатационной нитью, представлены на Рис. 7.



**Рис. 7.** Упругие поля круговой дилатационной нити, расположенной в плоскости  $XOY$ . Деформации и напряжения представлены в плоскости  $x = 0$ . Компоненты деформаций выражены в единицах  $\frac{(1+\nu)\rho_\varphi bs}{2\pi(1-\nu)r_0^2}$ , компоненты напряжений - в единицах  $\frac{G(1+\nu)\rho_\varphi bs}{\pi(1-\nu)r_0^2}$ ,  $G$  - модуль сдвига. Остальные обозначения те же, что и на Рис. 6.

Проверка показала, что напряжения (34) удовлетворяют уравнениям равновесия, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [18]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0.$$

**3.5. Круговой дилатационный диск (CAD).** Проинтегрируем поля круговой дилатационной нити (32)-(33) по радиусу  $r_0$  от 0 до  $a$  с постоянной линейной плотностью  $\rho_r$ . Получим поля кругового дилатационного диска радиуса  $a$  и бесконечно малой толщины:

$$u_i^{CAD} = \int_0^a u_i^{CAL} \rho_r dr_0, \quad i = r, \varphi, z; \quad (35)$$

$$u_r^{CAD} = \frac{(1+\nu)b}{2(1-\nu)} J(1,1;0), \quad u_\varphi^{CAD} = 0, \quad u_z^{CAD} = \frac{(1+\nu)b}{2(1-\nu)} \operatorname{sgn}(z) J(1,0;0); \quad (36 \text{ a,b,c})$$

Здесь принято  $\rho_\varphi \rho_r = 1/s$ , и интегралы Лифшица-Ханкеля нормированы на радиус

$$\text{диска } a: J(m,n;p) = \int_0^\infty J_m(\kappa) J_n\left(\frac{r}{a} \kappa\right) e^{-|z|\kappa/a} \kappa^p d\kappa.$$

В отличие от смещений дилатационной нити (32) поля смещений кругового дилатационного диска могут быть выражены интегралами Лифшица-Ханкеля во всех точках упругой среды. Предварительный анализ показывает, что на диске ( $z=0$ ) радиальные смещения  $u_r^{CAD}$  имеют расходимость, а смещения  $u_z^{CAD}$  испытывают конечный скачок.

$$\varepsilon_{ij}^{CAD} = \int_0^a \varepsilon_{ij}^{CAL} \rho_r dr_0, \quad i, j = r, \varphi, z; \quad (37)$$

$$\varepsilon_{rr}^{CAD} = \frac{(1+\nu)b}{2(1-\nu)} \left[ \frac{1}{a} J(1,0;1) - \frac{1}{r} J(1,1;0) \right], \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{CAD} = \frac{(1+\nu)b}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r} J(1,1;0), \quad (38 \text{ a,b})$$

$$\varepsilon_{zz}^{CAD} = -\frac{(1+\nu)b}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{a} J(1,0;1), \quad \varepsilon_{rz}^{CAD} = -\frac{(1+\nu)b}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(z)}{a} J(1,1;1), \quad (38 \text{ c,d})$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^{CAD} = \varepsilon_{\varphi z}^{CAD} = 0, \quad \Delta^{CAD} = \varepsilon_{rr}^{CAD} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{CAD} + \varepsilon_{zz}^{CAD} = 0. \quad (38 \text{ e,f,g})$$

Интегрирование (37) дает компоненты полных деформаций круговой нити (38).

#### 4. Заключение и выводы

Классификация дефектов упругого континуума, представленная в статье, основана на размерности области задания собственной дисторсии дефекта. Она позволяет определять место структурных дефектов - включений, дислокаций и дисклинаций - в иерархии дефектов упругого континуума. Например, если масштабные параметры упругой задачи намного превышают размеры дефекта, можно оперировать точечными или одномерными дефектами, или, если дислокационная петля состоит из атомов, отличающихся от атомов окружающей среды, то с точки зрения классификации – это суперпозиция обычной дислокационной петли с вектором Бюргерса  $\mathbf{b}^\perp$  и дилатационного диска. При этом множитель  $b$  в упругих полях диска, см. ф. (36) и

(38), представляет собой разность линейного размера атома петли и атома окружающей матрицы. Дисторсия классифицированного дефекта позволяет однозначно определить его упругие поля.

Рассматривая теорию дефектов шире, можно распространить ее за рамки упругого поля и применить к полям иной физической природы: электромагнитному и гравитационному. При известных полевых уравнениях с известной функцией Грина, задавая аналог дисторсии дефекта, например, электрический заряд, массу и т.п., можно рассчитать поля дефекта любой размерности, и, в частности, с учетом временной координаты. Формализованный подход позволяет не только рассчитывать поля дефекта, но и дает возможность строить аналогии в поведении дефектов полей различной природы.

В дальнейшем поля лучей, круговых дилатационной и сдвиговой нитей, и кругового дилатационного диска будут использованы в решении граничных задач и для моделирования осесимметричного включения.

### Литература

- [1] V. Volterra // *Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure. Paris* **24 (4)** (1907) 401.
- [2] J.D. Eshelby // *Proceedings of the Royal Society of London A* **241** (1957) 376.
- [3] Дж. Эшелби, *Континуальная теория дислокаций* (Изд-во иностранной литературы, Москва, 1963).
- [4] *Collected Works of J.D. Eshelby. The Mechanics of Defects and Inhomogeneties*, ed. by Xanthippi Markenscoff, Anurag Gupta (Springer, Notherlands, 2006).
- [5] F. Kroupa, In: *Theory of Crystal Defects*. Proceedings of the Summer School held in Hrazany in September 1964 (Academia - Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966), p. 276.
- [6] V.L. Indenbom, In: *Theory of Crystal Defects*. Proceedings of the Summer School held in Hrazany in September 1964 (Academia - Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966), p. 257.
- [7] Р. Де Вит, *Континуальная теория дисклинаций* (Мир, Москва, 1977).
- [8] J.P. Hirth, J. Lothe, *Theory of dislocations* (John Wiley and Sons, New York/ Chichester/ Brisbane/ Toronto/ Singapore, 1982).
- [9] Теодосиу, *Упругие модели дефектов в кристаллах* (Мир, Москва, 1985).
- [10] Т. Mura, *Micromechanics of Defects in Solids* (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1987).
- [11] А.Л. Колесникова, А.Е. Романов, *Круговые дислокационно-дисклинационные петли и их применение к решению граничных задач теории дефектов* (ФТИ, препринт № 1019, Ленинград, 1986)
- [12] А.Ю. Белов, In: *Elastic Strain Fields and Dislocation Mobility*, ed. by V.L. Indenbom, J. Lothe (Elsevier, 1992).
- [13] A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov // *Journal of Applied Mechanics* **71 (3)** (2004) 409.
- [14] N. Louat // *Nature (London)* **196 (4859)** (1962) 1081.
- [15] M.J. Marcinkowski, *Unified Theory of the Mechanical Behavior of Matter* (John Wiley and Sons, New York, 1979).
- [16] A.M. Korsunsky // *Journal of Elasticity* **44** (1996) 97.
- [17] R.J.H. Paynter, D.A. Hills, A.M. Korsunsky // *International Journal of Solids and Structures* **44** (2007) 6653.
- [18] Yu.N. Rabotnov, *Mechanics of the Deformed Solids* (Nauka, Moscow, 1979) (in Russian).
- [19] R.J. Asaro, V.A. Lubarda, *Mechanics of Solids and Materials* (Cambridge University Press, New York, 2006).

- [20] P.P. Groves, D.J. Bacon // *J. Appl. Phys.* **40** (1969) 4207.
- [21] T. Mura, In: *Advanced in Materials Research*, ed. by H. Herman (Interscience Publ., New York, 1968), Vol. 3, p. 1.
- [22] T. Mura // *Archives of Mechanics* **24 (3)** (1972) 449.
- [23] A. Howie, L.D. Marks // *Phil. Mag. A* **49** (1984) 95.
- [24] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними* (Гос. Изд-во Физико-математической литературы, Москва, 1959).
- [25] А. Кемпбелл, Дж. Иветс, *Критические токи в сверхпроводниках* (Мир, Москва, 1975).
- [26] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции* (Наука, Москва, 1964).
- [27] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, *Интегралы и Ряды. Специальные функции* (Наука, Москва, 1983) (in Russian).
- [28] G. Eason, B. Noble, I.N. Sneddon // *Phil. Trans. Roy. Soc. of London* **247 (935)** (1955) 529.

## DEFECTS IN THE ELASTIC CONTINUUM: CLASSIFICATION, FIELDS AND PHYSICAL ANALOGIES

A.L. Kolesnikova<sup>1</sup>, R.M. Soroka<sup>2,3</sup>, A.E. Romanov<sup>2,4\*</sup>

<sup>1</sup>Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,  
Bolshoj pr. 61, V.O., Saint Petersburg, 199178, Russia

<sup>2</sup>Ioffe Physical Technical Institute, Russian Academy of Sciences,  
Polytekhnicheskaya 26, Saint Petersburg, 194021, Russia

<sup>3</sup>Faculty of Electronics, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI",  
ul. Professora Popova 5, Saint Petersburg, 197376, Russia

<sup>4</sup>Department of Optical Information Systems and Technologies, National Research University of Information  
Technologies, Mechanics and Optics,  
Kronverkskiy pr. 49, Saint Petersburg, 197101, Russia

\*e-mail: aer@mail.ioffe.ru

**Abstract.** In the framework of continuum mechanics of solids the classification of the defects, i.e. the internal sources of elastic fields, is presented. The classification is based on the dimension of the area where the defect *eigenstrain* is given. On the base of the elastic fields of the infinitesimal dislocation loops the fields of various defects: localized line segment, the ray, the circular dilatation thread, and the circular dilatation disk are found. The fields for the axisymmetric defects are given in the form of Lipschitz–Hankel integrals.

### References

- [1] V. Volterra // *Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure. Paris* **24 (4)** (1907) 401.
- [2] J.D. Eshelby // *Proceedings of the Royal Society of London A* **241** (1957) 376.
- [3] J.D. Eshelby, *Continual Theory of Dislocations* (Publisher of Foreign Literature, Moscow, 1963) (in Russian).
- [4] *Collected Works of J.D. Eshelby. The Mechanics of Defects and Inhomogeneties*, ed. by

- Xanthippi Markenscoff, Anurag Gupta (Springer, Netherlands, 2006).
- [5] F. Kroupa, In: *Theory of Crystal Defects*. Proceedings of the Summer School held in Hrazany in September 1964 (Academia - Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966), p. 276.
- [6] V.L. Indenbom, In: *Theory of Crystal Defects*. Proceedings of the Summer School held in Hrazany in September 1964 (Academia - Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966), p. 257.
- [7] R. De Wit, *Continual Theory of Disclinations* (Mir, Moscow, 1977) (in Russian).
- [8] J.P. Hirth, J. Lothe, *Theory of dislocations* (John Wiley and Sons, New York/ Chichester/ Brisbane/ Toronto/ Singapore, 1982).
- [9] C. Teodosiu, *Elastic Models of Crystal Defects* (Springer-Verlag, 1982).
- [10] T. Mura, *Micromechanics of Defects in Solids* (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1987).
- [11] A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov, *Circular dislocation-disclination loops and their application to boundary problem solution in the theory of defects* (Phys.-Tech. Inst., Preprint No 1019, Leningrad, 1986) (in Russian).
- [12] A.Yu. Belov, In: *Elastic Strain Fields and Dislocation Mobility*, ed. by V.L. Indenbom, J. Lothe (Elsevier, 1992).
- [13] A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov // *Journal of Applied Mechanics* **71 (3)** (2004) 409.
- [14] N. Louat // *Nature (London)* **196 (4859)** (1962) 1081.
- [15] M.J. Marcinkowski, *Unified Theory of the Mechanical Behavior of Matter* (John Wiley and Sons, New York, 1979).
- [16] A.M. Korsunsky // *Journal of Elasticity* **44** (1996) 97.
- [17] R.J.H. Paynter, D.A. Hills, A.M. Korsunsky // *International Journal of Solids and Structures* **44** (2007) 6653.
- [18] Yu.N. Rabotnov, *Mechanics of the Deformed Solids* (Nauka, Moscow, 1979) (in Russian).
- [19] R.J. Asaro, V.A. Lubarda, *Mechanics of Solids and Materials* (Cambridge University Press, New York, 2006).
- [20] P.P. Groves, D.J. Bacon // *J. Appl. Phys.* **40** (1969) 4207.
- [21] T. Mura, In: *Advanced in Materials Research*, ed. by H. Herman (Interscience Publ., New York, 1968), Vol. 3, p. 1.
- [22] T. Mura // *Archives of Mechanics* **24 (3)** (1972) 449.
- [23] A. Howie, L.D. Marks // *Phil. Mag. A* **49** (1984) 95.
- [24] I.M. Gelfand, G.E. Shilov, *Generalized functions and operations on them* (State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, Moscow, 1959), (in Russian).
- [25] A.M. Campbell, J. Evetts, *Critical Currents in Superconductors* (Taylor & Francis Ltd, United Kingdom, 1972).
- [26] E Jahnke, F Emde, F. Lösch, *Tafeln höherer Funktionen* (Stuttgart, Teubner, 1960).
- [27] A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev, 1983. *Integrals and Series. Special Functions* (Nauka, Moscow, 1983) (in Russian).
- [28] G. Eason, B. Noble, I.N. Sneddon // *Phil. Trans. Roy. Soc. of London* **247 (935)** (1955) 529.